

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 4 marzo 1923.*

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica.** — *Sopra una proprietà cinematica che caratterizza le superficie W.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1.

Il celebre teorema di Weingarten identifica la ricerca delle superficie W (superficie i cui raggi principali di curvatura sono legati da una relazione) colla ricerca delle superficie applicabili sopra superficie di rotazione.

La proprietà di cui tratta la presente Nota, e colla quale vogliamo caratterizzare cinematicamente le superficie W (ossia le deformate per flessione delle superficie di rotazione), si riferisce ad una *losanga sghemba*, di lato in generale variabile, suscettibile di assumere una *doppia* infinità di posizioni nello spazio, per modo che le quattro superficie luogo dei quattro vertici abbiano, ciascuna, per piano tangente il piano dei due lati della losanga che vi concorrono, o come diremo la corrispondente faccia della losanga.

In altri termini, domandiamo di trovare tutte le possibili quaderne  $(S_1, S_2, S_3, S_4)$  di superficie, con corrispondenza di punto a punto, in guisa che, essendo  $M_1, M_2, M_3, M_4$  quattro punti generici corrispondenti:

*Il quadrilatero  $M_1 M_2 M_3 M_4$  abbia i quattro lati  $M_1 M_2, M_2 M_3, M_3 M_4, M_4 M_1$  eguali, e la superficie  $S_i$  luogo del vertice  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sia toccata dai lati ivi concorrenti.*

2.

Cominciamo intanto, supposte soddisfatte queste condizioni, a dedurne elementarmente alcune conseguenze, immediate per la simmetria della losanga variabile.

Le due normali nei vertici opposti  $M_1, M_3$  alle superficie  $S_1, S_3$ , cioè le normali alle facce  $M_1 M_2 M_4, M_3 M_2 M_4$  della losanga, s'incontrano in un punto  $F_1$  equidistante da  $M_1, M_3$ , onde descrivendo la sfera di centro  $F_1$  e raggio  $F_1 M_1 = F_1 M_3$ , questa tocca in  $M_1$  la  $S_1$ , in  $M_3$  la  $S_3$ . Perciò, se con  $\Sigma_1$  indichiamo la superficie luogo di  $F_1$ , avremo una doppia infinità di sfere delle quali sarà  $\Sigma_1$  la superficie luogo dei centri, mentre  $S_1, S_3$  saranno le due falde dell'involuppo. Segue allora, da note proprietà degli involuppi di sfere, che il piano tangente in  $F_1$  alla  $\Sigma_1$  è il piano normale alla diagonale  $M_1 M_3$  nel suo punto medio, che diremo  $P$ , e passa quindi per l'altra diagonale  $M_2 M_4$ ; questo piano  $F_1 M_2 M_4$  è il primo piano di simmetria della losanga. Similmente le normali in  $M_2, M_4$  alle  $S_2, S_4$  si incontrano in un punto  $F_2$  (equidistante da  $M_2, M_4$ ), e la superficie  $\Sigma_2$  luogo di  $F_2$  ha per piano tangente in  $F_2$  il secondo piano di simmetria  $F_2 M_1 M_3$  della losanga, che è normale alla diagonale  $M_2 M_4$  nel suo punto medio  $Q$ . Si vede dunque che la congiungente  $PQ$  i punti medii delle diagonali  $M_1 M_3, M_2 M_4$  tocca in  $F_1$  la  $\Sigma_1$ , in  $F_2$  la  $\Sigma_2$ , per cui  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sono le due falde focali della congruenza (PQ) generata dalla retta  $PQ$ . Ma inoltre i due piani tangenti a  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , come piani di simmetria della losanga, si tagliano ortogonalmente lungo  $F_1 F_2$  e perciò la congruenza rettilinea (PQ) è una congruenza normale. Vediamo dunque intanto che:

*Se la losanga  $M_1 M_2 M_3 M_4$  assume una doppia infinità di configurazioni soddisfacente alle condizioni supposte, la congiungente  $PQ$  i punti medii delle diagonali  $M_1 M_3, M_2 M_4$  descrive una congruenza normale.*

3.

Se per le deduzioni precedenti sono bastate considerazioni geometriche elementari, converrà ora, per le ulteriori, ricorrere al calcolo. Cominciamo dal provare la proposizione fondamentale:

*Le superficie ortogonali alla congruenza rettilinea (PQ), generata dalla congiungente i punti medii delle diagonali della losanga mobile supposta, sono superficie  $W$ , ossia le due falde  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dell'evoluta sono applicabili sopra superficie (complementari) di rotazione.*

Per stabilire questa proprietà prendiamo a superficie di partenza una superficie  $S$  ortogonale ai raggi  $PQ$  e riferiamola alle sue linee di curvatura  $(u, v)$ . Indicando con  $M \equiv (x, y, z)$  un punto generico di  $S$ , mante-



niamo pei nove coseni di direzione del triedro principale di S, col vertice in M, le consuete notazioni e ricorriamo alle formole del solito quadro:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E} X_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}}{r_2} X_1, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G} X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2, \\ \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 - \frac{\sqrt{G}}{r_1} X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} X_2. \end{array} \right.$$

Scriviamo le coordinate dei due centri principali di curvatura  $F_1 \equiv (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ,  $F_2 \equiv (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ :

$$(2) \quad \xi_1 = x - r_1 X_3, \quad \xi_2 = x - r_2 X_3, \text{ ecc.};$$

e denotando poi con  $(x_1, y_1, z_1)$  le coordinate del primo vertice  $M_1$  della losanga, e similmente per gli altri tre, potremo porre

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = x + M X_2 + B X_3 \\ x_3 = x - M X_2 + B X_3 \end{cases}$$

$$(3\star) \quad \begin{cases} x_2 = x + L X_1 + A X_3 \\ x_4 = x - L X_1 + A X_3, \end{cases}$$

con formole analoghe per gli altri due assi. Qui A, B; L, M denotano quattro funzioni di  $u, v$ , che dobbiamo assoggettare alle condizioni geometriche del problema; e precisamente A, B sono le ascisse, misurate sulla normale alla S a partire dal piede, dei punti medii Q, P delle diagonali  $M_2 M_4$ ,  $M_1 M_3$ , mentre 2L, 2M danno le lunghezze di queste diagonali.

Basta ora scrivere le condizioni di normalità delle congiungenti  $F_1 M_1$ ,  $F_1 M_3$ ;  $F_2 M_2$ ,  $F_2 M_4$  alle quattro facce della losanga e si ottengono le due relazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} L^2 = (B - A)(A + r_2) \\ M^2 = (A - B)(B + r_1), \end{cases}$$

restando così da determinare le due sole funzioni incognite A, B.

#### 4.

Oltre a queste relazioni algebriche bisogna ora calcolare quelle differenziali che risultano, secondo i dati del problema, dall'esprimere che le quattro superficie  $S_1, S_2, S_3, S_4$  debbono essere tangenti alle quattro facce

della losanga. Per questo calcoliamo dalle (3), (3\*) le derivate di  $x_1, x_3$ , il che dà, per le (1), le formole:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left( \sqrt{E} + \frac{B\sqrt{E}}{r_2} + \frac{M}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) X_1 + \frac{\partial M}{\partial u} X_2 + \frac{\partial B}{\partial u} X_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{M}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \left( \sqrt{G} + B \frac{\sqrt{G}}{r_1} + \frac{\partial M}{\partial v} \right) X_2 + \left( \frac{\partial B}{\partial v} - M \frac{\sqrt{G}}{r_1} \right) X_3 \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} &= \left( \sqrt{E} + \frac{A\sqrt{E}}{r_2} + \frac{\partial L}{\partial u} \right) X_1 - \frac{L}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \left( \frac{\partial A}{\partial u} - L \frac{\sqrt{E}}{r_2} \right) X_3 \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} &= \frac{\partial L}{\partial v} X_1 + \left( \sqrt{G} + \frac{A\sqrt{G}}{r_1} + \frac{L}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) X_2 + \frac{\partial A}{\partial v} X_3, \end{aligned} \right.$$

mentre per le derivate di  $x_2, x_4$  basterà, nelle formole superiori, cangiare di segno M, L. Se si esprimono le dette condizioni d'ortogonalità, si trovano le quattro relazioni differenziali

$$\left\{ \begin{aligned} A \frac{\partial A}{\partial u} + L \frac{\partial L}{\partial u} + r_2 \frac{\partial A}{\partial u} &= 0 \\ A \frac{\partial A}{\partial v} + L \frac{\partial L}{\partial v} + r_2 \frac{\partial A}{\partial v} &= 0 \\ B \frac{\partial B}{\partial u} + M \frac{\partial M}{\partial u} + r_1 \frac{\partial B}{\partial u} &= 0 \\ B \frac{\partial B}{\partial v} + M \frac{\partial M}{\partial v} + r_1 \frac{\partial B}{\partial v} &= 0; \end{aligned} \right.$$

e queste, insieme alle (I), esprimono tutte le condizioni necessarie e sufficienti del problema.

Se scriviamo le precedenti sotto la forma equivalente

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (A^2 + L^2) + 2r_2 \frac{\partial A}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} (A^2 + L^2) + 2r_2 \frac{\partial A}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} (B^2 + M^2) + 2r_1 \frac{\partial B}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} (B^2 + M^2) + 2r_1 \frac{\partial B}{\partial v} &= 0, \end{aligned} \right.$$

escludendo il caso ovvio di superficie canali con  $r_2$  (o  $r_1$ ) costante, ne risulta subito che A, L debbono essere funzioni di  $r_2$ , e similmente B, M di  $r_1$ . Ma allora dalle (I) segue che  $r_1, r_2$  sono funzioni l'uno dell'altro, e perciò: *la superficie S è una superficie W*, come si è assertedo al n. 2.



5.

L'analisi precedente permette d'invertire la ricerca partendo da una qualunque superficie  $S$  i cui raggi principali di curvatura  $r_1, r_2$  siano funzioni l'uno dell'altro e di un medesimo parametro  $\alpha$ . Cerchiamo di determinare le quattro funzioni  $A, B, L, M$  del parametro  $\alpha$  in modo da soddisfare a tutte le condizioni del problema, e cioè alle (I) ed insieme alle equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{d}{d\alpha} (A^2 + L^2) + 2r_2 \frac{dA}{d\alpha} = 0 \\ \frac{d}{d\alpha} (B^2 + M^2) + 2r_1 \frac{dB}{d\alpha} = 0. \end{cases}$$

Eliminando, colle (I),  $L^2, M^2$  si hanno per  $A, B$  le equazioni

$$(4) \quad \begin{cases} (B + r_1) \frac{dA}{d\alpha} + (A + r_1) \frac{dB}{d\alpha} = (B - A) \frac{dr_1}{d\alpha} \\ (B + r_2) \frac{dA}{d\alpha} + (A + r_2) \frac{dB}{d\alpha} = (A - B) \frac{dr_2}{d\alpha} \end{cases}$$

che possiamo risolvere rispetto a  $\frac{dA}{d\alpha}, \frac{dB}{d\alpha}$ , osservando che il determinante

$$(B + r_1)(A + r_2) - (A + r_1)(B + r_2) = (A - B)(r_1 - r_2)$$

eguaglia l'espressione

$$(A - B)^2 + L^2 + M^2,$$

il cui valore è il quadrato  $\delta^2$  del lato della losanga. Così otteniamo le equazioni differenziali lineari:

$$(4^*) \quad \begin{cases} \frac{dA}{d\alpha} = \frac{1}{r_2 - r_1} \frac{d(r_1 + r_2)}{d\alpha} A + \frac{1}{r_2 - r_1} \frac{d(r_1 r_2)}{d\alpha} \\ \frac{dB}{d\alpha} = \frac{1}{r_1 - r_2} \frac{d(r_1 + r_2)}{d\alpha} B + \frac{1}{r_1 - r_2} \frac{d(r_1 r_2)}{d\alpha}, \end{cases}$$

e con quadrature abbiamo le funzioni  $A, B$  nelle quali restano due costanti arbitrarie. Se ne conclude:

*Ad ogni superficie  $W$ , arbitrariamente data, si può coordinare (in una doppia infinità di modi) una serie  $\infty^2$  di losanghe sghembe soddisfacenti alle condizioni del problema.*

Possiamo poi pensare la losanga variabile coordinata, anzichè all'evolvente  $W$ , alle due falde  $\Sigma_1, \Sigma_2$  dell'evoluta applicabili sopra superficie (complementari) di rotazione. Si nota allora che tutti gli elementi della lo-

sanga, come funzioni di  $\alpha$ , sono invariabili lungo le deformate dei paralleli, e perciò:

*La losanga sgheмба resta invariabilmente collegata alla superficie  $\Sigma_1$  (o alla complementare  $\Sigma_2$ ) quando questa si deforma per flessione.*

6.

Prendiamo ora a considerare le quattro congruenze rettilinee generate dai quattro lati della losanga, nelle quali riscontreremo alcune proprietà metriche notevoli. La prima è data dal teorema:

*Le quattro congruenze generate dai lati della losanga hanno (lo stesso) parametro medio costante H <sup>(1)</sup>.*

Per dimostrarlo ricorriamo alla formola già sopra stabilita per la distanza  $\delta$  dei fuochi (lato della losanga) data da

$$\delta^2 = (A - B)(r_1 - r_2),$$

e calcoliamo anche l'angolo  $\sigma$  dei due piani focali coll'osservare che i coseni di direzione delle normali  $F_1 M_1$ ,  $F_2 M_2$  alle superficie  $S_1$ ,  $S_2$  sono dati dalle due espressioni

$$\frac{M X_2 + (B + r_1) X_3}{\sqrt{M^2 + (B + r_1)^2}}, \quad \frac{L X_1 + (A + r_2) X_3}{\sqrt{L^2 + (A + r_2)^2}}$$

e dalle altre analoghe per gli altri due assi. Così calcoliamo

$$\cos^2 \sigma = \frac{(B + r_1)^2 (A + r_2)^2}{\{M^2 + (B + r_1)^2\} \cdot \{L^2 + (A + r_2)^2\}},$$

e riducendo colle (I)

$$\cos^2 \sigma = \frac{(A + r_2)(B + r_1)}{(A + r_1)(B + r_2)},$$

da cui

$$\sin^2 \sigma = \frac{-\delta^2}{(A + r_1)(B + r_2)}.$$

Ma la distanza  $d$  dei punti limiti è data da

$$d = \frac{\delta}{\sin \sigma},$$

e si ha dunque

$$d^2 = -(A + r_1)(B + r_2),$$

<sup>(1)</sup> Si ricordi che per ciascun raggio di una congruenza il parametro medio H è dato da

$$H = \sqrt{d^2 - \delta^2},$$

essendo  $d$  la distanza dei punti limiti,  $\delta$  quella dei fuochi.



dopo di che, costruendo il quadrato  $H^2$  del parametro medio, risulta

$$H^2 = d^2 - \delta^2 = -(A + r_2)(B + r_1).$$

Ora, se si deriva rapporto ad  $\alpha$  il prodotto

$$(A + r_2)(B + r_1),$$

con riguardo alle equazioni differenziali (4), (4\*), si vede che questa derivata è nulla, e perciò  $H = \text{cost.}$ , c. d. d.

Si osservi anche che  $B + r_1$ ,  $A + r_2$  sono i valori algebrici dei segmenti  $\overline{PF_1}$ ,  $\overline{QF_2}$ , onde l'integrale primo sopra osservato delle equazioni differenziali (4) esprime anche che: *nella losanga variabile è costante il prodotto  $\overline{PF_1} \cdot \overline{QF_2}$ .*

## 7.

Una seconda notevole proprietà metrica delle quattro congruenze è la seguente:

*Ciascuna delle quattro congruenze generate dai lati della losanga è, in doppio modo, una congruenza di rotolamento* <sup>(1)</sup>.

E infatti nella configurazione della losanga variabile  $M_1 M_2 M_3 M_4$  e delle due sfere coi centri in  $F_1, F_2$ , che ne toccano rispettivamente le facce in  $(M_1, M_3)$ ,  $(M_2, M_4)$ , si trovano soddisfatte le condizioni caratteristiche per le congruenze di rotolamento, di cui al § 7 della Memoria citata in nota. Ne segue p. es. che la congruenza generata dal lato  $M_1 M_2$  della losanga è, *in doppio modo*, una congruenza di rotolamento; e precisamente in un primo modo di generazione la superficie d'appoggio sarà la prima falda  $\Sigma_1$  dell'evoluta, nel secondo modo la seconda  $\Sigma_2$ . Siccome poi la congruenza generata è a parametro medio costante, come si è visto, i teoremi dimostrati al § 15 della Memoria ora citata fanno conoscere la superficie rotolante:

*La superficie rotolante  $S_0$  è, ciascuna volta, un elicoidale applicabile sopra  $\Sigma_1$  (o  $\Sigma_2$ ), con parametro elicoidale eguale al parametro medio  $H$ , e l'asse dell'elicoidale è la retta satellite.*

Si noti poi che le due costanti arbitrarie inerenti alle funzioni  $A, B$  permettono di far coincidere l'elicoidale rotolante  $S_0$  con uno qualunque degli elicoidi applicabili sopra  $\Sigma_1$ , onde si vede che le congruenze descritte dai lati della losanga mobile sono in sostanza le più generali congruenze gene-

<sup>(1)</sup> Per congruenza (rettilinea) di rotolamento s'intende una congruenza generata da una retta  $r$  (satellite) invariabilmente legata ad una superficie (rotolante)  $S_0$  che rotola sopra una superficie applicabile  $S$  (superficie d'appoggio).

Cfr. la Memoria: *Sulle congruenze rettilinee di rotolamento* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo 39, 1915).

rate dall'asse di un elicoide che rotoli su qualunque sua superficie applicabile.

I risultati esposti nella presente Nota sembrano suscettibili di applicazioni di qualche interesse, sulle quali mi riservo di tornare più tardi. Qui mi limiterò ad osservare che, se si impone alla losanga variabile di conservare un lato *assolutamente* costante, le due superficie  $\Sigma_1, \Sigma_2$  risultano allora applicabili su quadriche rotonde, mentre le quattro superficie  $S_1, S_2, S_3, S_4$  diventano a curvatura costante e formano una quaderna del teorema di permutabilità.

**Matematica.** — *Intorno alla costruzione razionale degli integrali di Picard della 1<sup>a</sup> specie.* Nota del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

Ritorno sulla costruzione razionale degli integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie appartenenti ad una superficie algebrica, cui son pervenuto in precedenti lavori <sup>(1)</sup>, per colmare una lacuna del ragionamento, la quale non influisce affatto sulle conclusioni.

Oltre al risultato in sè, che era necessario di porre al riparo da ogni obiezione, offre forse interesse l'analisi che qui m'occorre dei cicli lineari della superficie, generati a partire da quelli di una sua sezione piana. In questa direzione conviene spingersi più a fondo per una più intima conoscenza topologica della riemanniana immagine reale della superficie: cosa essenziale per ulteriori progressi della teoria.

1. Sia  $f$ , di equazione  $f(x, y, z) = 0$ , la data superficie di ordine  $m$  (irriducibile e dotata di linea doppia e punti tripli).

Gli assi coordinati sieno, rispetto ad  $f$ , in posizione generica.

Distendiamo le variabili complessè  $x, y$  su due piani, che chiameremo risp. il piano  $x$  ed il piano  $y$ . Sul piano  $x$ , per ogni dato  $y$ , saranno determinati i punti di diramazione della funzione  $z$  di  $x$ , definita da  $f = 0$ . Li chiameremo i punti  $D$ : ognuno di essi è funzione di  $y$ . In particolare essi divengono i punti  $D_0$ , quando  $y$  assume il valore  $y_0$ , fissato genericamente. Fissiamo anche sul piano  $x$  un generico  $x_0$ . Allora restan determinati sul piano  $y$  i punti di diramazione della  $z(y)$  definita da  $f(x_0, y, z) = 0$ . Li chiameremo i punti  $E_0$ .

<sup>(1)</sup> *Sur les intégrales simples de première espèce attachées à une surface algébrique*, Comptes rendus, t. 152, 1911, p. 1079; *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie algebrica*, nel volume: « Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio », 1918, pag. 186.



Assunto il punto  $x_0$  come origine dei cappii, costruiamo la superficie di Riemann  $R(y_0)$ , che ha le diramazioni nei  $D_0$ , e che rappresenta la  $z(x)$  definita da  $f(x, y_0, z) = 0$ . Variando  $y$ , a partire da  $y_0$ , resta per continuità definita la riemanniana  $R(y)$ , che ha le diramazioni nei  $D$ . Naturalmente le linee di passaggio di questa riemanniana (piano  $m$ -plo  $x$ ), dipendono in generale dal cammino con cui si va da  $y_0$  al valor considerato di  $y$ .

2. Ciò premesso, si fissi sul piano  $x$  un ciclo chiuso *orientato*  $\tau$ , che parta da  $x_0$ , in un determinato verso, e vi ritorni. Se  $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \dots, z_m^{(0)}$  sono i valori distinti di  $z$ , corrispondenti ad  $x = x_0, y = y_0$ , e se, lasciato fermo  $y$  in  $y_0$ , il ciclo  $\tau$  muta  $z_h^{(0)}$  in  $z_k^{(0)}$ , ad esso risponde in  $R(y_0)$  un cammino che va dall'*origine*  $N_h^{(0)}(x_0, y_0, z_h^{(0)})$  al *termine*  $N_k^{(0)}(x_0, y_0, z_k^{(0)})$ . In particolare, quando  $h = k$ , il cammino omologo a  $\tau$  è un ciclo lineare chiuso. Si ottengono così su  $R(y_0)$   $m$  cammini orientati corrispondenti a  $\tau$ . Chiameremo in modo generico  $\sigma_h^{(0)}$  quello che ha l'origine in  $N_h^{(0)}$ .

*Tenuto fisso il ciclo  $\tau$* , si faccia ora variare  $y$ , a partire da  $y_0$ . Allora i cammini  $\sigma$ , omologhi di  $\tau$ , variano con  $R(y)$ , a partire dalle posizioni iniziali  $\sigma^{(0)}$ ; e durante la variazione taluno di quei cammini, che inizialmente era aperto, può chiudersi o viceversa, pel fatto che qualcuno dei punti variabili  $D$  venga ad attraversare  $\tau$ . Così risultano definiti per continuità i cammini  $\sigma$  corrispondenti ad un  $y$  qualunque. Naturalmente l'ordine con cui, per una data posizione finale  $\bar{y}$  di  $y$ , questi cammini si succedono, come trasformati di  $\sigma_1^{(0)}, \dots, \sigma_m^{(0)}$ , dipende dalla via seguita per andare da  $y_0$  a  $\bar{y}$ . Ritornando  $y$  in  $y_0$ , il complesso dei cammini  $\sigma$  ritorna in sè medesimo; ma essi si ripresenteranno in generale permutati, e, in quanto ogni  $\sigma^{(0)}$  è caratterizzato dalla sua origine  $N^{(0)}$ , la permutazione subita sarà identica a quella che lo stesso cammino di  $y$  ha prodotto sulle determinazioni  $z_1^{(0)}, \dots, z_m^{(0)}$ , considerate adesso come valori della  $z(y)$  definita da  $f(x_0, y, z) = 0$ .

Quel che si è detto pei cammini  $\sigma^{(0)}$  vale pei cammini  $\bar{\sigma}$ , da quelli derivati facendo percorrere ad  $y$  un cammino  $\lambda$  da  $y_0$  a  $\bar{y}$ : cioè un ciclo da  $\bar{y}$  ad  $\bar{y}$  permuterà fra loro i  $\bar{\sigma}$ . Tutti i cammini  $\lambda$  di origine  $y_0$  e di estremo  $\bar{y}$ , deducibili l'uno dall'altro per deformazione continua, senza attraversare alcun punto  $E_0$ , condurranno dai  $\sigma^{(0)}$  ai  $\bar{\sigma}$  nel medesimo ordine. Insomma i cammini  $\sigma$ , così determinati per ogni punto del piano  $y$ , si comportano come i rami della funzione algebrica  $z$  di  $y$  definita da  $f(x_0, y, z) = 0$ .

3. Un altro modo havvi di considerar le cose. Sul piano  $y$  son determinati anche i cosiddetti *valori singolari*, a ciascuno  $b$  dei quali corrisponde un gruppo di punti  $D$  fra cui ve ne sono due coincidenti, per guisa che, girando  $y$  attorno a  $b$ , i due punti  $D$  che vanno a coincidere per  $y = b$ , si scambiano fra loro. Tali valori provengono o da piani  $y = b$  tangenti ad  $f$  o da piani  $y = b$  che contengono tangenti asintotiche di  $f$  parallele

all'asse  $z$ . Ma i veri valori singolari, che hanno importanza sostanziale per la nostra questione, sono soltanto quelli della prima categoria <sup>(1)</sup>.

Invece di tener fisso il ciclo  $\tau$ , si può, mentre  $y$  varia, deformare  $\tau$  con continuità in modo che, pur passando sempre per  $x_0$ , non venga mai ad essere attraversato da punti D. E per ogni siffatta posizione di  $\tau$ , si possono costruire i corrispondenti cammini  $\sigma$  su  $R(y)$ . Allora, dopo una circolazione di  $y$ , ciascuno dei cammini  $\sigma$  ritorna di certo in sè, se niuna permutazione è avvenuta fra i punti D; mentre, se avviene una permutazione fra i D, i cammini  $\sigma$  si mutano generalmente in cammini che non sono affatto riducibili ai precedenti (per deformazione continua, senza attraversare i punti D).

4. Tutto ciò chiarito, suppongasi ora  $y_0$  prossimo ad uno dei valori singolari  $b$ , talmente che, quando  $y$  descrive una piccola area A contenente  $y_0$  e  $b$ , la areola A' descritta dai due punti D (e sieno D', D'') che si permutano fra loro per le circolazioni attorno a  $b$ , non abbia punti comuni colle aree descritte in corrispondenza dagli altri punti D, ognuno dei quali ritorna in sè per le circolazioni suddette. Si potrà allora scegliere come ciclo  $\tau$ , uscente da  $x_0$ , un ciclo che avvolga i soli due punti D', D'', posizioni rispettive di D', D'' per  $y = y_0$ , e che abbracci pure nel suo interno la areola A'.

I punti D', D'' connettono i medesimi due fogli della riemanniana  $R(y)$ , perchè essi, sovrapponendosi per  $y = b$ , devono dar luogo ad un punto doppio di  $f(x, b, z) = 0$ . Sieno  $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}$  le due determinazioni di  $z$ , corrispondenti ad  $x = x_0, y = y_0$ , che son permutate da ciascuno dei due cappii da  $x_0$  ai punti D', D''. Allora, per  $y = y_0$ , al ciclo  $\tau$  rispondono  $m$  cicli (chiusi)  $\sigma_1^{(0)}, \dots, \sigma_m^{(0)}$ . Mentre  $y$  varia entro A, nessuno dei punti D attraversa  $\tau$ , e quindi i cammini  $\sigma$  corrispondenti a  $\tau$  sono sempre i medesimi, tanto se si considerino le cose dal punto di vista del n. 2 (varia  $y$  e resta fermo  $\tau$ ) che del n. 3 (varia  $y$  e si deforma  $\tau$ ).

5. Stabilite queste premesse topologiche, consideriamo un integrale abeliano  $u = \int R(x, y, z) dx$ , appartenente alla curva  $f(x, y, z) = 0$  ( $y$  parametro) e supponiamo ch'esso sia di 1<sup>a</sup> specie per ogni  $y$  (compreso  $y = \infty$ ).

I suoi valori  $u_1, u_2, \dots, u_m$  lungo i cammini  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ , definiti su  $R(y)$  secondo il punto di vista del n. 2, costituiscono gli  $m$  rami d'una funzione algebroide, esistente in tutto il piano  $y$  e diramata nei punti  $E_0$ . Le funzioni simmetriche elementari di  $u_1, \dots, u_m$  sono cioè funzioni analitiche uniformi di  $y$ . E poichè esse restano uniformi e finite per ogni  $y$ , si conclude che sono costanti, e quindi che tali sono le  $u_1, u_2, \dots, u_m$ .

Questa conclusione vale in particolare pei cammini  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  corrispondenti al ciclo  $\tau$  definito nel n. prec., cammini che, fino a quando si limiti la variabilità di  $y$  nell'areola A, sono addirittura cicli (chiusi) di  $R(y)$ .

<sup>(1)</sup> Ved. la mia Nota, *Sulla teoria degli integrali semplici di 1<sup>a</sup> specie appartenenti ad una superficie*, in questi Rendiconti, 1921, pag. 233.



Ma le funzioni  $u'_1, u'_2, \dots, u'_m$ , analoghe alle  $u_1, \dots, u_m$ , ottenute da  $u$  quando  $y$  varii in tutto il piano e i cammini  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  sieno costruiti, a partire dal ciclo  $\pi$  definito nel n. prec., dal punto di vista del n. 3, coincidono risp. nell'arcata  $A$  colle funzioni  $u_1, u_2, \dots, u_m$  (n. 4): dunque  $u'_1, u'_2$ , che sono olomorfe nell'area  $A$ , sono ivi costanti.

Ora  $u'_1$  è il periodo di  $u$  lungo il ciclo  $\sigma_1$  avvolgente i due punti di diramazione  $D', D''$ . E poichè al limite, per  $y = b$ , il ciclo  $\sigma_1$  diventa un ciclo della riemanniana  $R(b)$ , avvolgente un punto non di diramazione, sopra un determinato foglio di questa, così esso è omologo a un ciclo nullo. Da ciò, tenuto conto che  $u$  è di 1<sup>a</sup> specie anche per  $y = b$ , se ne conclude che la costante  $u'_1$  è nulla. E analogamente per  $u'_2$ .

Come si sa, i periodi di  $u$ , considerati come funzioni di  $y$ , soddisfanno all'equazione differenziale lineare di Fuchs-Picard, i cui punti critici cadono nei punti singolari  $b$ . Nell'intorno del punto singolare  $y = b$  è definito un integrale olomorfo  $\omega(y)$  di tale equazione, corrispondente al ciclo  $\sigma_1$  (o  $\sigma_2$ ), e un altro integrale  $\Omega(y)$ , che diventa infinito logaritmicamente in  $y = b$ , aumentando di  $\omega(y)$  per una circolazione di  $y$  attorno a  $b$ . Tutti gli altri integrali dell'equazione differenziale sono olomorfi attorno a  $b$ . Poichè nel nostro caso  $\omega(y) = u'_1$  è nullo, da  $\Omega(y)$  viene a sparire la singolarità logaritmica. Onde tutti i periodi di  $u$  sono olomorfi attorno ad  $y = b$  e similmente nell'intorno di ogni altro punto singolare. E siccome essi sono dovunque finiti, risultano in definitiva costanti. La conclusione è il teorema da me già dato nei lavori citati:

*Se un integrale abeliano relativo ad una curva algebrica  $f(x, y, z) = 0$ , i cui coefficienti dipendano razionalmente da un parametro  $y$ , resta di 1<sup>a</sup> specie per ogni valore di  $y$  (compreso  $y = \infty$ ), i suoi periodi sono indipendenti da  $y$  <sup>(1)</sup>.*

Da ciò, come nei miei lavori precedenti, si trae subito la nota costruzione razionale dei differenziali totali di 1<sup>a</sup> specie appartenenti alla superficie  $f(x, y, z) = 0$ .

(<sup>1</sup>) Il difetto della dimostrazione esposta nel secondo dei lavori citati in nota (<sup>1</sup>) a pag. 192, consiste in ciò: che la trasformazione del n. 3 non basta a uniformizzare la funzione che là si considera.

**Fisica matematica.** — *Sulle varie interpretazioni della trasformazione di Lorentz.* Nota del Socio G. A. MAGGI.

Il Socio Somigliana, nella sua recente Nota « Sulla trasformazione di Lorentz », comparsa in questi Rendiconti <sup>(1)</sup>, da un esame del procedimento tenuto dal Voigt <sup>(2)</sup>, fondato sopra una trasformazione delle coordinate e del tempo, donde mostra come si ricavi la nota trasformazione di Lorentz, trae la conclusione che tutte le proprietà che, nella teoria della relatività, risultano dalla trasformazione lorentziana siano generalmente suscettibili di una interpretazione di carattere nettamente newtoniano: per cui qualunque eventuale verifica di tali proprietà non potrà, in via generale, essere citata come decisiva a favore dell'una piuttosto che dell'altra interpretazione.

Giustamente il nostro Socio richiama l'attenzione sopra questa conclusione. Credo perciò che possano essere trovate di qualche interesse le pur semplici riflessioni, che formano l'oggetto di questa breve Nota.

Il Voigt, io osservo, stabilisce una sostituzione di variabili  $x, y, z, t$  con variabili  $x', y', z', t'$  (adopero qua, e in seguito, i simboli comunemente adoperati per la trasformazione di Lorentz) — le  $x, y, z$  e  $x', y', z'$  col significato di coordinate cartesiane ortogonali di un punto,  $t$  e  $t'$  col significato di tempo — per la quale si verifica l'identità

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = k^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2), \quad k = 1 / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

(dove quindi, come rileva il Somigliana, si ricava la trasformazione di Lorentz, semplicemente sostituendo a  $x', y', z', t'$  i prodotti delle stesse variabili per  $k$ ) collo scopo, e puramente collo scopo, di dedurre da un integrale dell'equazione di d'Alembert

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi,$$

che conviene alle onde luminose irradiate da una superficie fissa, un integrale della stessa equazione, che convenga invece alla luce irradiata da una superficie mobile. Nessuna connessione sostanziale unisce le due ipotesi. La super-

<sup>(1)</sup> Vol. XXXI, serie 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., fasc. 10 (seduta del 21 maggio 1922).

<sup>(2)</sup> *Ueber das Doppler'sche Princip*, Nachrichten v. d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. 10 März, 1887.



fie illuminante fissa può essere abbandonata definitivamente, una volta che se n'è serviti, per trovare la soluzione appartenente alla superficie mobile. E questa soluzione potrebbe essere giustificata direttamente, coll'introdurre la relativa espressione di  $g$  nella (2), e rilevare le circostanze attinenti alla supposta superficie, tacendo affatto del caso di una corrispondente superficie fissa, senza che ne riesca sostanzialmente modificata la dimostrazione del principio di Doppler, che fornisce il Voigt.

Questo non toglie, indubbiamente, che la relazione fra le  $x', y', z', t'$  e le  $x, y, z, t$  si presti all'interpretazione fornita dal confronto dei due casi contemplati dal Voigt. Ma, per concludere che questa interpretazione vale quella che appartiene alla teoria della relatività, vediamo come le due interpretazioni rispondano ad un concetto essenzialmente diverso, sia intrinsecamente, sia rispetto alla proposta spiegazione del principio di Doppler.

Per la teoria del Voigt, mi riferisco al precedente discorso. Per la teoria della relatività, ivi le  $x', y', z', t'$  e le  $x, y, z, t$ , legate dalla sostituzione di Lorentz, rappresentano uno stesso punto spazio-temporale, le prime, in un riferimento mobile, rispetto al quale la sorgente di luce è fissa, le seconde, in un riferimento, rispetto al quale si verifica il supposto movimento della sorgente medesima. I due casi, della sorgente di luce fissa e della sorgente mobile, costituiscono due aspetti dello stesso fenomeno: l'irradiazione della luce da una sorgente, che risulta fissa, per un riferimento, mobile, per l'altro: la sostituzione di Lorentz, col suddetto significato, stabilisce la connessione dei due aspetti, e il principio di Doppler trova la sua spiegazione nell'apprezzamento che, col riferimento agli assi  $Oxyz$ , col tempo  $t$ , riceve la radiazione, che obbedisce alla legge relativa all'ipotesi della sorgente fissa, col riferimento agli assi  $O'x'y'z'$ , col tempo  $t'$ .

Analoghe riflessioni si estendono naturalmente alla formola, richiamata pure dal Somigliana, per la composizione relativistica delle velocità, con la quale la teoria della relatività ritrova il coefficiente di trascinamento di Fresnel: deduzione che forma forse il più attraente de' suoi risultati.

Io non sono alieno dal far voto che la teoria newtoniana, più conforme alle esigenze dell'intuizione, estenda il suo dominio a quelle regioni che sembra attualmente contenderle la teoria della relatività, ma gli esempi recati non permettono, a mio modo di vedere, di affermare che essa tragga lo stesso profitto di questa dalla trasformazione di Lorentz: occorrerà, perciò, che dai suoi principii, essa ricavi un egual modo di connettere la trasformazione di Lorentz cogli elementi intrinseci del problema, per fondarvi una comparabile soluzione.

**Matematica.** — *La teoria proiettiva delle congruenze W.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI.

1. Qui e in alcune Note che seguiranno esporrò in modo sistematico le mie antiche ricerche sulle congruenze W, usando però anche di alcune idee contenute in un assai notevole lavoro posteriore dello Jonas <sup>(1)</sup>. Si vedrà che la teoria riceve una semplicità insperata, che si adatta bene a ogni problema particolare; io ne esporrò anche i legami con le usuali teorie metriche, e ne farò applicazioni alle congruenze W con falde focali rigate od isotermo assintotiche e ai relativi teoremi di permutabilità.

2. Sarà bene anzitutto riassumere brevemente alcune formole relative alla teoria della superficie. Se  $x, y, z, t$  sono coordinate omogenee di un punto A funzioni di due parametri  $u, v$ , indicheremo con  $(x, x_u, x_v, x_{uv})$  il determinante, di cui gli elementi scritti tra ( ) costituiscono la prima riga, mentre le altre righe se ne ottengono sostituendo alla  $x$  le  $y, z, t$ . Se le  $u, v$  sono assintotiche sulla superficie S generata dal punto A, allora, posto:

$$(1) \quad H^2 = (x, x_u, x_v, x_{uv})$$

varranno le:

$$(2) \quad x_{uu} - \frac{\partial \log H}{\partial u} x_u - \beta x_v - p x = 0 \quad ; \quad x_{vv} - \frac{\partial \log H}{\partial v} x_v - \gamma x_u - q x = 0$$

ove  $2H(\beta du^2 \pm \gamma dv^2) = 0$  è l'equazione delle linee di Darboux-Segre sulla S. (La prima delle (2) p. es. si verifica, derivandola rispetto  $v$  e confrontandola con l'equazione dedotta da (1) derivando rispetto  $u$ ).

Se formiamo le coordinate  $(\xi, \eta, \zeta, v)$  del piano tangente in guisa che

$$(3) \quad (\xi, \xi_u, \xi_v, \xi_{uv}) = (x, x_u, x_v, x_{uv}) = H^2$$

varranno le:

$$(4) \quad \xi_{uu} - \frac{\partial \log H}{\partial u} \xi_u + \beta \xi_v - P \xi = 0 \quad ; \quad \xi_{vv} - \frac{\partial \log H}{\partial v} \xi_v + \gamma \xi_u - Q \xi = 0$$

ove

$$(5) \quad P - p = \beta_v + \beta \frac{\partial \log H}{\partial v} \quad ; \quad Q - q = \gamma_u + \gamma \frac{\partial \log H}{\partial u}.$$

<sup>(1)</sup> Cfr. le Mem. dell'A. *Fondamenti di geom. proiettivo differ.* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo 43 (1918-19), le Mem. ivi citate e le Note: *Su una classe di congr. W* (Rend. dei Lincei vol. 25, 1° sem.), *Sulla teoria proiett. delle congr. W* (ibidem, vol. 30, 1° sem.) e la Mem. dello Jonas nel tomo 29 p. 40 degli *Jahresberichte d. d. m. Vereinigung* (1920): *Ueber die Konstruktion der W. Kongruenzen etc.*



Le condizioni d'integrabilità si scrivono

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \gamma_u + 2q + \gamma \frac{\partial \log H}{\partial u} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \log H}{\partial v} \right)^2 \right] = \beta \gamma_v + 2\gamma \beta_v + \frac{\partial^3 \log H}{\partial u \partial v^2} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left[ \beta_v + 2p + \beta \frac{\partial \log H}{\partial v} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \log H}{\partial u} \right)^2 \right] = \gamma \beta_u + 2\beta \gamma_u + \frac{\partial^3 \log H}{\partial v \partial u^2} \\ q_v \beta + 2\beta_v q + q_u \frac{\partial \log H}{\partial u} + p_{vv} = p_u \gamma + 2\gamma_u p + p_u \frac{\partial \log H}{\partial v} + q_{uu} . \end{cases}$$

Notiamo che dalla superficie luogo di punti si passa alla superficie pensata come involuppo di piani tangenti, sostituendo alle  $\beta, \gamma$ , le  $-\beta, -\gamma$ , e lasciando invariate  $H$  e le  $\pi, \kappa$  definite dalle:

$$(7) \quad \begin{cases} \pi = p + \frac{1}{2} \beta_v + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial \log H}{\partial v} = P - \frac{1}{2} \beta_v - \frac{1}{2} \beta \frac{H_v}{H} , \\ \kappa = q + \frac{1}{2} \gamma_u + \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial \log H}{\partial u} = Q - \frac{1}{2} \gamma_u - \frac{1}{2} \gamma \frac{H_u}{H} . \end{cases}$$

Potremmo anzi nelle (6) sostituire, (per avere formole che si conservano per trasformazioni reciproche) alle  $p, q$  i loro valori espressi in funzione di  $\pi$  e di  $\kappa$ .

3. Cerchiamo le superficie  $S_1$ , seconda falda focale di una congruenza  $W$  avente  $S$  per prima falda duale; e indichiamo un punto o un piano con la sua prima coordinata. Per un punto  $x_1$  di  $S_1$  corrispondente ad un punto  $x$  di  $S$  varranno delle formole:

$$(8) \quad x_1 = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v) \quad (\text{e analoghe in } y, z, t)$$

mentre per il relativo piano tangente sarà:

$$(9) \quad \xi_1 = \lambda x + 2(Ax_u - Bx_v) .$$

Se esprimiamo che la retta  $x - x_1$  genera una congruenza  $W$ , di cui  $S$  ed  $S_1$  sono falde focali, troviamo che, moltiplicando  $\mu, \lambda, A, B$  per un conveniente fattore (ciò che nulla muta, perchè si tratta di coordinate omogenee) devono valere le <sup>(1)</sup>:

$$(10) \quad A_v = -B\gamma \quad B_u = -A\beta$$

$$(11) \quad \mu = -B_v - A_u - B \frac{H_v}{H} - A \frac{H_u}{H}$$

$$(12) \quad \lambda = B_v - A_u + B \frac{H_v}{H} - A \frac{H_u}{H} .$$

<sup>(1)</sup> Per i particolari del calcolo affatto elementare rimando, per ragioni di spazio, alla mia Mem. cit.: *Fondamenti*. ecc.

La ricerca delle congruenze  $W$  di data prima falda focale equivale alla integrazione del semplicissimo sistema (10) <sup>(1)</sup>.

4. Invece nelle solite trattazioni metriche, il problema, come apparirà ora ben chiaro, si rivolge alla determinazione della  $\mu$ . Alle (11), (12) si possono sostituire le:

$$(13) \quad 2A_u = -(\mu + \lambda) - 2A \frac{H_u}{H} \quad 2B_v = \lambda - \mu - 2B \frac{H_v}{H}.$$

Scrivendo che le (10), (13), pensate come equazioni in  $A, B$ , sono integrabili, si trova:

$$(14) \quad \begin{cases} \lambda_v = -\mu_v - 2A (\log H)_{uv} + 2B \gamma \frac{H_u}{H} + 2\gamma_u B - 2\beta \gamma A \\ \lambda_u = \mu_u + 2B (\log H)_{uv} - 2A \beta \frac{H_v}{H} - 2\beta_v A + 2\beta \gamma B. \end{cases}$$

Scrivendo le condizioni di integrabilità di (14) si trova per le (6):

$$(15) \quad \mu_{uv} - \left( \frac{\partial^2 \log H}{\partial u \partial v} + \beta \gamma \right) \mu + 2B q_u + 2A p_v = 0.$$

5. Prima di proseguire osserviamo che, se moltiplichiamo le coordinate di un punto di  $S$  per uno stesso fattore  $q$ , allora  $H$  resta moltiplicato per  $q^2$ . Si può scegliere  $q$  in guisa che:

$\alpha$ ) sia  $p = q = 0$ , ciò che equivale a usare coordinate *non omogenee*, ossia a supporre che la 4<sup>a</sup> coordinata sia 1.

$\beta$ ) oppure che sia  $H = 1$ . Si hanno le coordinate di Wilczynski, il cui uso non va scevro da inconvenienti, perchè il corrispondente fattore  $q$  dipende dai parametri  $u, v$  usati per le asintotiche e non è intrinseco.

$\gamma$ ) oppure, se la superficie non è rigata, cioè se  $\beta \gamma \neq 0$ , in guisa che  $H = \beta \gamma$ . In quest'ultima ipotesi si hanno le coordinate, che io (loc. cit.) chiamai *normali* e che nella geom. proiettiva hanno l'ufficio che le cartesiane hanno nella geom. metrica.

Nel caso  $(\alpha)$  la (15) diventa:

$$(15\text{-bis}) \quad \mu_{uv} = M\mu \quad M = \frac{\partial^2 \log H}{\partial u \partial v} + \beta \gamma.$$

<sup>(1)</sup> Noto che le (10) equivalgono alla sola equazione lineare

$$(10\text{-bis}) \quad \left( \frac{R_u}{\beta} \right)_v = B\gamma \quad \text{oppure} \quad \left( \frac{A_v}{\gamma} \right)_u = A\beta,$$

oppure, lasciando indeterminato il fattore per cui si moltiplicano le  $A, B$ , alla:

$$(10\text{-ter}) \quad \frac{\partial^2 \log \frac{A}{B}}{\partial u \partial v} = \left( \frac{B}{A} \gamma \right)_u - \left( \frac{A}{B} \beta \right)_v.$$



Ora se la quarta coordinata  $t=1$  e le prime  $x, y, z$  sono cartesiane ortogonali, allora con le notazioni delle classiche lezioni di Geom. differenziale del Prof. L. Bianchi si ha da (1)

$$H^2 = D' \sqrt{EG - F^2} \quad ; \quad \text{curvatura di Gauss} = -\frac{1}{\varrho^2} \quad ; \quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{D'^2}{EG - F^2}$$

$$\frac{\partial \log H}{\partial u} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial \log H}{\partial v} = \begin{pmatrix} 22 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}_v + \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}_u + \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{F}{\varrho^2} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\varrho}}{\partial u \partial v} - f^{(1)}.$$

La (15) o (15-bis) è la equazione di Moutard, base delle teorie metriche delle congruenze  $W$ .

Oss. Si noti che se, con le notazioni del Bianchi,  $Xx + Yy + Zz = W$  è l'equazione del piano tangente, il determ.  $(X \ X_u \ X_v \ X_{uv})$  vale  $D' \sqrt{eg - f^2}$ .

Per normare le  $X, Y, Z, W$  in guisa che valga la (3), dovremo moltiplicarle per  $\sqrt[4]{\frac{EG - F^2}{eg - f^2}}$ , ossia sostituire loro le  $\xi = X \sqrt{\varrho}, \eta = Y \sqrt{\varrho}, Z = Z \sqrt{\varrho}$ , ecc.

Le prime tre di queste sono appunto le quantità che figurano nelle formole di Lelievre e di cui qui appare ora ben chiaro il significato!

6. Dalle (8) derivando si ha:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = (\mu_u + 2A p) x - \lambda x_u + 2B x_{uv} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = (\mu_v + 2B q) x + \lambda x_v + 2A x_{uv} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = ax + bx_u + cx_v - \mu x_v \end{cases}$$

dove è per noi inutile esplicitare i valori delle  $a, b, c$ .

Si trova:

$$H_1^2 = \left( x_1, \frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} \right) = (x, x_u, x_v, x_{uv}) \begin{vmatrix} \mu & 2A & 2B & 0 \\ \mu_u + 2Ap & -\lambda & 0 & 2B \\ \mu_v + 2Bq & 0 & \lambda & 2A \\ a & b & c & -\mu \end{vmatrix}$$

(<sup>1</sup>) Per queste identità cfr. Picone (Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo, tomo 37) *Sulle congruenze rettilinee*  $W$  a pag. 227.

Aggiungendo all'ultima colonna la seconda moltiplicata per  $\frac{2B}{\lambda}$  e la terza per  $-\frac{2A}{\lambda}$  si trova così ( $\lambda \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} H_1^2 &= H^2 \left( -\mu + b \frac{2B}{\lambda} - c \frac{2A}{\lambda} \right) \lambda \left\{ 2B(\mu_v + 2Bq) - \lambda\mu - 2A(\mu_u + 2Ap) \right\} \\ &= H^2 [\lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap) - 2B(\mu_v + 2Bq)]^2 \end{aligned}$$

(risultato valido anche per  $\lambda = 0$ , com'è evidente) ossia:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \frac{H_1}{H} &= N = 2A(\mu_u + 2Ap) - 2B(\mu_v + 2Bq) + \lambda\mu \\ &= 2A(\lambda_u + 2Ap) + 2B(\lambda_v - 2Bq) + \lambda\mu \end{aligned}$$

che è una espressione essenziale per la nostra teoria.

Se fosse  $N = 0$ , la seconda falda sarebbe degenera. Escludiamo questo caso di minore interesse.

**Fisica.** — *Fenomeni foto-elettrici sui coibenti elettrizzati per strofinamento* <sup>(1)</sup>. Nota del Corrisp. P. CARDANI.

L'argomento è stato molto limitatamente trattato dal Righi nelle sue classiche ricerche: egli, infatti, affermò <sup>(2)</sup> che « prendendo un disco coibente, per es. di zolfo, collocandolo sopra un disco metallico comunicante con l'elettrometro, ed elettrizzando negativamente la faccia libera del coibente, per es. con lo strofinamento, appena le radiazioni cadono sul coibente elettrizzato, l'elettrometro devia in senso positivo, se fu messo prima dell'esperienza in comunicazione col suolo, o si vede diminuire la deviazione negativa rimasta, se lo si è lasciato con la sua carica d'influenza ». « L'effetto è notevolissimo con lo zolfo, un po' minore con l'ebanite, è assai piccolo con la gomma lacca e specialmente col vetro ».

Dopo quelle del Righi, pochissime furono le esperienze <sup>(3)</sup> sul fenomeno foto-elettrico presentato dai coibenti; e nessuno, che mi consti, ha seguito il metodo del Righi: d'altra parte dall'accenno fatto dal Righi « sulla diminuzione della deviazione negativa dell'elettrometro rimasta, se lo si è lasciato con la sua carica d'influenza » è da ritenere che egli abbia sperimentato con piccole quantità di elettricità svolte per strofinamento.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Parma.

<sup>(2)</sup> Righi, *Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni*. Nuovo Cimento, 1889, serie II, tomo XXV, pag. 136.

<sup>(3)</sup> Vedi Hughes, *Die Lichtelectricität*. Leipzig, 1915, pag. 157.

In seguito ai risultati ottenuti per gli effetti foto-elettrici sui metalli con potenziali molto elevati, prossimi a quelli corrispondenti alla scarica per scintilla, ho pensato che un particolare interesse avrebbe potuto presentare una analoga ricerca nei coibenti, seguendo lo stesso metodo del Righi, ma estendendola ai campi più intensi che si possono ottenere per mezzo dello strofinamento delle lastre medesime, quando, cioè, esse avessero conseguita la quantità massima di elettricità, e sottoponendo in seguito la faccia negativa all'azione delle radiazioni ultra-violette. La presente Nota riporta i risultati da me ottenuti seguendo questo indirizzo.

\* \* \*

Come sorgente delle radiazioni ho adoperata una lampada di quarzo a vapore di mercurio dell'Heraeus; ho dovuto abbandonare l'arco voltaico, perchè molto incostante, specialmente facendo uso di carboni un po' spessi: con carboni sottili ho tuttavia ottenuti risultati discreti ma non certo paragonabili, per la loro concordanza, con quelli ottenuti con la lampada di quarzo: questa funzionò sempre alimentata da una corrente di 1,6 amp. con 110 volta.

La disposizione sperimentale adoperata è stata la seguente.

A circa 18 cm. dalla lampada di quarzo era posto un grande schermo di cartone che portava una finestra rettangolare, capace di lasciar passare quel tanto di radiazioni da investire nella parte mediana la lastra coibente: subito dopo lo schermo, una rete metallica, collocata sopra un tavolo, si protendeva per oltre un metro dai lati: essa era chiusa superiormente con altra rete metallica così da costituire un ampio conduttore chiuso, tranne che nella parte posteriore. Dentro la rete, sul tavolo, era posto il supporto di vetro verde e paraffinato, sul quale era avvitata una piccola forcilla in ebanite che sosteneva la lastra isolante: la faccia strofinata di quest'ultima si disponeva, naturalmente, in modo che fosse rivolta verso la lampada, mentre la faccia non battuta era armata di un disco metallico che comunicava con un filo molto lungo e sottile con l'ago di un elettrometro del Mascart, opportunamente modificato per ridurne, per quanto era possibile, la capacità.

Nel filo era inserito un interruttore, col quale, manovrandolo a distanza, si poteva stabilire o togliere la comunicazione col suolo.

Dinnanzi alla apertura praticata sullo schermo era collocato un altro schermo a cerniera, che serviva per intercettare le radiazioni che dalla lampada arrivavano alla lastra in esame, la quale in tal modo veniva oscurata. La lastra coibente si trovava complessivamente a circa 50 cm. dalla lampada: finalmente davanti al supporto della lastra era collocato, sempre internamente alla rete, un piccolo tavolino di legno comunicante col suolo, sul quale si poteva disporre la lastra per alcune misure di controllo.



Ho adoperato lastre in forma di dischi circolari di 20 cm. di diametro ed 1 cm. di spessore: lo specchio dell'elettrometro dava un'immagine luminosa sopra una scala posta a 6 m. di distanza, le cui divisioni corrispondevano a 10 cm.

\*  
\* \*

Ho anzitutto verificato se l'apparecchio fosse in condizioni di ottimo isolamento: per ciò, strofinata la lastra di ebanite con 100 battute, date con un panno di lana, in modo di avere lo stato di saturazione e collocatala sulla forcella, dopo pochi minuti per attendere l'assettamento delle cariche, isolando l'ago dell'elettrometro, esso rimaneva rigorosamente fermo. In secondo luogo ho verificato se cause esterne di ionizzazione potessero influire sulla carica della lastra: accesa una fiamma in prossimità della rete, ma esternamente, non ostante l'abbondante ionizzazione prodotta, l'ago dell'elettrometro isolato rimaneva ancora rigorosamente fermo; introdotto invece dentro la rete un piccolo disco ricoperto di ossido di torio, l'ago, appena isolato, devì vivamente dalla parte delle deviazioni positive. La rete dunque proteggeva completamente le cariche collocate nel suo interno da cause perturbatrici esterne.

In terzo luogo ho esaminato se vi fossero cause perturbatrici dovute ad effetti foto-elettrici delle radiazioni sulla rete che dalle medesime veniva attraversata: per ciò ho collocato la lastra coibente elettrizzata sempre internamente alla rete, ma di fianco al cammino delle radiazioni, così che non ne venisse investita. Con la faccia negativa rivolta verso l'esterno, l'ago isolato rimaneva immobile, come doveva essere perchè la carica indotta sulla rete essendo positiva, nessun fenomeno foto-elettrico doveva manifestarsi: ma, invertita la lastra, in modo di mettere verso l'esterno la faccia positiva, l'ago dell'elettrometro deviava, accusando appunto un processo foto-elettrico che doveva prodursi sulla rete metallica. Ho quindi spalmato di sego tutta la regione della rete, attraverso la quale passavano le radiazioni della lampada, e l'effetto scomparve del tutto.

Eliminate così le possibili cause di errore, ho provato il comportamento dell'apparecchio col solito effetto foto-elettrico. Posta quindi sulla forcella una lastra di rame iodurata in comunicazione con l'ago dell'elettrometro e la lastra di ebanite elettrizzata sul tavolino di legno con la faccia strofinata negativa rivolta verso la lastra di rame, fatta investire quest'ultima dalle radiazioni, l'ago rimase immobile, come doveva infatti avvenire per esser la carica indotta sulla lastra di rame positiva: ma capovolta la lastra di ebanite, così da portare la faccia positiva al posto della precedente, l'ago dell'elettrometro venne come sbalzato fuori della scala, compiendo oltre 10 divisioni di deviazione per minuto secondo. Spesso mi sono servito di questa lastra di rame iodurata per avere un controllo sul regolare funzionamento dell'apparecchio.

\* \* \*

Lo studio del fenomeno foto-elettrico sulle lastre coibenti elettrizzate per strofinamento fu da me fatto in due modi: 1°) osservando come esso variava col variare del numero delle battute date alla lastra; 2°) osservando come variava col tempo la dispersione della carica posseduta dalla lastra sotto l'azione continua della luce.

Seguendo il primo metodo, ho misurato il numero dei secondi che impiegava l'ago dell'elettrometro a deviare di un determinato numero di divisioni, per es. 5, partendo sempre nel contare il tempo dall'istante in cui l'immagine sulla scala passava sopra una divisione fissa, per es. sulla 5<sup>a</sup> divisione dallo zero. L'effetto foto-elettrico era così inversamente proporzionale al tempo osservato. Nei seguenti specchietti sono riportati i valori ottenuti, scegliendo, tra le numerosissime serie, quelle per le quali le lastre si mostrarono quasi del tutto scariche. Nella colonna segnata con la lettera N sono riferiti i numeri delle battute date alla lastra; in quella segnata con  $t$  il numero dei secondi impiegati dall'immagine luminosa a percorrere 5 divisioni della scala; nella terza sono riportati i valori  $\frac{1000}{t}$ , ai quali sono proporzionali gli effetti foto elettrici:

Ebanite			Solfo			Pece greca		
N	$t$	$\frac{1000}{t}$	N	$t$	$\frac{1000}{t}$	N	$t$	$\frac{1000}{t}$
2	38 "	26	5	110 "	9	5	80	12
5	18	55	10	60	16,5	10	44	23
10	9,5	105	20	36	28	20	29	35
20	6,0	166	40	21,5	46,5	40	18,5	54
40	5,5	182	60	17	58	70	13,5	74
70	5	200	80	15	66	100	12,5	80
100	5	200	100	14	71	200	12,5	80
			200	14	71			

Con la ceralacca l'effetto è debolissimo non ostante essa presentasse una forte elettrizzazione, come ho potuto verificare con la lastra iodurata.

Dai precedenti specchietti si ricava che l'effetto foto-elettrico cresce da prima quasi proporzionalmente al numero delle battute per poi tendere rapidamente ad un valore massimo: ma i valori osservati variano da sostanza a sostanza e per ogni sostanza dallo stato della superficie.

Seguendo il secondo metodo, ho elettrizzata la lastra in modo da avere la massima quantità di elettricità che alla medesima poteva venir conferita per strofinamento ed ho misurato il tempo  $t$  in secondi, impiegato dall'immagine luminosa a percorrere 5 divisioni della scala facendo queste misure

di 10 in 10 minuti primi e contando il tempo  $T$  dal momento in cui la luce investiva la faccia elettrizzata della lastra.

Riporto, come esempio, una delle tante serie fatte con l'ebanite, elettrizzata con 100 battute:

$T$	$t$	$\frac{1000}{t}$
0'	5''	200
10	5	200
20	6	166
30	12	83
40	18	55
50	27	37
60	40	25
70	56	18
80	80	12,5
90	125	8
100	250	4
110	lastra scarica	—

Dello stesso tipo sono tutte le altre esperienze relative a misure fatte con lo zolfo e con la pece greca: ma i valori iniziali di  $t$  sono molto più elevati e per ciò molto minore la corrente osservata.

Questo secondo metodo mette in maggiore evidenza alcune particolarità del fenomeno, che sfuggono nel primo. Esso, infatti, mostra che, passando dai campi più intensi, quali si hanno quando la lastra possiede la carica massima che le può esser conferita per strofinamento, in campi più deboli, quando la lastra è quasi scarica, la corrente osservata sotto l'azione delle radiazioni si modifica con una legge molto complessa.

Quando la lastra possiede la carica massima, la corrente è per un certo periodo di tempo costante: e poichè manifestamente nel medesimo periodo sotto l'azione delle radiazioni la dispersione deve compiersi, e in modo cospicuo, e quindi anche l'intensità del campo deve diminuire, la costanza del valore della corrente sta a dimostrare che in questo periodo deve esistere una corrente di saturazione: questa corrente è per l'ebanite dell'ordine di grandezza di quelle che si osservano nei metalli più foto-elettrici, come col rame iodurato, cioè una corrente molto intensa.

Invece, quando la lastra è quasi scarica, la corrente è molto debole: e siccome è presumibile che, sotto l'azione costante delle radiazioni, la quantità di elettricità, che ancora rimane, diminuisca proporzionalmente al tempo per il quale la lastra è illuminata, e quindi anche proporzionalmente al tempo diminuisca l'intensità del campo, i numeri riferiti starebbero a dimostrare che la corrente osservata diminuisce proporzionalmente all'intensità del campo



esistente sulla lastra fino a ridursi a zero. In questo caso i numeri riportati misurano il vero effetto foto-elettrico, effetto che, quando esiste, è sempre molto piccolo nelle sostanze isolanti, come è stato sempre trovato dai vari sperimentatori.

Tra queste due estreme condizioni, nelle quali si trova la lastra al principio e alla fine dell'esperienza, esiste uno stato intermedio, nel quale la corrente osservata per l'azione delle radiazioni decresce rapidamente dal valore massimo della saturazione al valore minimo corrispondente alla lastra quasi scarica.

Un andamento analogo al precedente si osserva sull'effetto foto-elettrico presentato dai metalli quando le ricerche si estendono a campi molto intensi. Il cui valore vada avvicinandosi a quello per il quale si verifica la scarica per scintilla. Le esperienze dello Schweidler e del Kreisler<sup>(1)</sup> dimostrano infatti, che tra una lastra metallica negativa illuminata dalle radiazioni e una rete metallica parallela positiva prospiciente, la corrente al di sopra dei 1000 volta cresce da prima pochissimo e proporzionalmente al campo; poi di più di quanto vorrebbe la legge di proporzionalità, per assumere un aumento rapidissimo avvicinandosi alle condizioni per le quali si manifesta la scarica per scintilla.

Il Thomson<sup>(2)</sup> spiega facilmente con la teoria della ionizzazione questo particolare andamento della corrente prodotta dalle radiazioni con l'intensità del campo, ammettendo che, al vero effetto foto-elettrico, si sovrappongano, per campi sufficientemente intensi, altri effetti di molta maggiore intensità dovuti alla ionizzazione per urto.

Applicando questa medesima teoria al caso delle esperienze contenute nella presente Nota, si dovrebbe ritenere che da principio, quando la lastra è debolmente elettrizzata, si presenti il solo effetto foto-elettrico unipolare con emissione di un certo numero di elettroni, il cui allontanamento dalla lastra elettrizzata corrisponde ad una eguale carica di elettricità positiva messa in libertà, che si manifesta nella deviazione positiva dell'elettrometro: in queste condizioni la corrente varia proporzionalmente al campo. Ma gli elettroni, appena liberi, danno origine con le molecole dell'aria ad altrettanti ioni negativi, che devono muoversi in direzione contraria al campo e la cui velocità deve andare aumentando con l'aumentare del campo medesimo. Ora è noto che, quando i ioni raggiungono una determinata velocità, acquistano anche l'energia necessaria a produrre nuovi ioni, positivi e negativi; da questo momento, quando, cioè, il campo ha tal valore che i ioni negativi possono produrre la ionizzazione per urto dell'aria che attraversano, la corrente accusata dall'elettrometro deve aumentare rapidamente, aggiun-

(1) Vedi J. J. Thomson, *Passage de l'électricité à travers les gas*, pag. 262.

(2) Idem., pag. 267.

gendosi all'effetto foto-elettrico quello dovuto ai ioni positivi che dalla lastra vengono richiamati. E si comprende che il processo debba anche rapidamente intensificarsi con l'aumentare dell'intensità del campo per il numero sempre maggiore di ioni positivi che vengono a prodursi, e debba così rapidamente intensificarsi la corrente accusata dall'elettrometro.

La ricombinazione spontanea dei ioni tenderà finalmente a rendere costante il numero dei ioni positivi presenti, raggiunta la quale condizione, anche la corrente accusata dall'elettrometro dovrà rimanere costante, come appunto si osserva con l'esperienza.

Sotto un certo aspetto si può dunque ritenere che il fenomeno foto-elettrico venga amplificato attraverso la ionizzazione per urto con la presenza di campi molto intensi: della qual cosa si avrebbe una nuova conferma sperimentale, nei risultati riportati nella presente Nota.

**Geofisica.** — *Rilevamenti magnetici nel versante medio e nelle minori isole del Tirreno.* Nota del Corrisp. LUIGI PALAZZO.

1. In conformità del programma di esplorazione magnetica prefisso, due anni or sono, all'Ufficio Centrale Meteorologico, furono continuati nello scorso 1922 i rilievi aventi per iscopo l'accertamento delle variazioni secolari in Italia negli ultimi tempi e l'allestimento di nuove carte pel magnetismo terrestre. Dovendo queste servire essenzialmente ai fini della nautica, si è ognor cercato nei rilevamenti di tenerci al mare, in quanto (difettandoci i mezzi per eseguire determinazioni magnetiche da bordo di navi al largo) si sono scelte le stazioni di misure terrestri preferibilmente lungo i litorali e nelle isole. Così nel 1921 ho compiuto l'investigazione magnetica del bacino Adriatico, dandone poi breve resoconto alla R. Accademia<sup>(1)</sup>; e nel successivo 1922 ho intrapreso i rilievi nel Tirreno, non tutto però, ma limitatamente alla parte mediana di esso, dall'altezza di Livorno in giù fino al golfo di Napoli.

La prima stazione magnetica del 1922 fu fatta a Terracina, nel maggio, essendosi presentata l'opportunità di procedere colà a nuovi confronti fra i nostri strumenti e quelli della Istituzione Carnegie di Washington, insieme al magnetologo Parkinson, venuto a Roma col direttore Bauer pel convegno dell'Unione geodetica-geofisica internazionale. Ma il vero viaggio esplorativo del Tirreno non potè essere da me cominciato che nell'estate già avanzata, verso la fine dell'agosto, e fu poi proseguito, salvo brevi interruzioni, sino a dicembre. Il ritardo frapposto all'inizio, e l'inclemenza del tempo spesso incon-

<sup>(1)</sup> Rend., vol. XXXI, serie 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem. 1922, pp. 230-236.

trata nel seguito, non mi permisero di passare alla Sardegna ed alla Corsica, che pure erano contemplate nel programma.

In tutto furono fatte 17 stazioni magnetiche; e di queste, 9 sono *stazioni di ripetizione*, cioè sono punti nei quali le misure già erano state prese precedentemente in varie epoche (dal P. Denza, dal prof. Chistoni e da me) e dove pertanto le determinazioni furono ora ripetute per lo studio delle variazioni secolari. Le rimanenti 8 stazioni sono punti affatto nuovi aggiunti alla carta magnetica italiana; ed invero nella nostra carta del 1892 erano state lasciate delle lacune che ora importava colmare, coll'estendere le osservazioni alle isole minori del Napoletano e della Toscana, mai per l'innanzi esplorate da alcun magnetologo <sup>(1)</sup>.

Dò qui l'elenco delle stazioni fatte nel 1922, secondo l'ordine cronologico; a fianco di ciascuna sono segnati i giorni fra i quali caddero le misure, ed è indicata la natura del suolo intorno al centro di stazione, desunta riconoscendo le rocce sul posto e compulsando le carte geologiche. Le stazioni di ripetizione sono distinte mediante asterisco.

- 1<sup>a</sup>. Terracina \* (V, 16-18). — Sabbie marine recenti, formanti piccole dune (tumoleti).
- 2<sup>a</sup>. Montecassino \* (VIII, 26-27). — Calcare compatto di epoca cretacea.
- 3<sup>a</sup>. Montevergine \* (VIII, 29-30). — Calcare compatto del cretaceo (urgoniano).
- 4<sup>a</sup>. Capri, Marina Grande (IX, 6-8). — Calcare grigio del cretaceo (urgoniano).
- 5<sup>a</sup>. Zannone (IX, 12-15). — Lembo di calcare eocenico sovrastante a dolomia.
- 6<sup>a</sup>. Gorgona (IX, 21-23). — Micascisti e calcescisti del mesozoico?
- 7<sup>a</sup>. Capraia (IX, 27-28). — Trachiti.
- 8<sup>a</sup>. Pianosa (IX, 30-X, 2). — Calcare a nullipore del miocene.
- 9<sup>a</sup>. Montecristo (X, 4-6). — Granito porfiroide con cristalli giganti di ortose.
- 10<sup>a</sup>. Marina di Campo, nell'Elba (X, 7-9). — Arenaria e scisti argillosi-calcarei dell'eocene.
- 11<sup>a</sup>. Giglio (X, 12-14). — Granito decomposto (detto masso).
- 12<sup>a</sup>. Orbetello \* (X, 17-19). — Terreno alluvionale.
- 13<sup>a</sup>. Livorno \* (X, 25-31). — Depositi marini recenti.
- 14<sup>a</sup>. Campiglia Marittima \* (XI, 3-6). — Calcare marnoso e scisti arenacei dell'eocene.

(1) Dell'arcipelago Toscano, soltanto l'isola d'Elba — che io sappia — ebbe in tempo ormai remoto, cioè nel 1835, una visita da parte dei magnetologi Sartorius von Waltershausen e Listing, i quali, col metodo delle oscillazioni, determinarono la sola componente orizzontale in pochi punti vicini a distretti minerari, tra cui il Monte Calamita (vedi in: *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*, n. XIII, pag. 157; Leipzig 1841).



15<sup>a</sup>. Siena \* (XI, 9-11). — Sabbie e ciottoli del pliocene.

16<sup>a</sup>. Civitavecchia \* (XI, 30-XII, 1). — Calcare marnoso ed arenaria dell'eocene medio.

17<sup>a</sup>. Roma \* <sup>(1)</sup>, Stazione A: Villa Spalletti-Rasponi già Crescimbene, sulla via Camilluccia (XII, 13-14). — Ghiaie calcareo-silicee e sabbie gialle; passaggio dal pliocene al quaternario.

Id. Stazione B: Podere dell'ex-Scuola Agraria al Casale S. Pio V, presso la via Aurelia (XII, 18-19). — Tufo terroso vulcanico riposante su sabbie quarzose e su marne turchine; passaggio dal pliocene al quaternario.

2. I risultati delle misure sono sommariamente esposti nel quadro appresso, il quale è diviso in due sezioni, per l'opportunità di mettere subito in evidenza le correlazioni fra i valori degli elementi magnetici e le posizioni geografiche dei luoghi. È noto che in Italia la declinazione magnetica è variabile essenzialmente con la longitudine, e le linee isogone corrono poco inclinate rispetto ai meridiani; e pertanto in una sezione del quadro, dopo avere ordinate le stazioni secondo la longitudine (da Greenwich) crescente da ovest ad est, vi abbiamo inseriti i valori D delle declinazioni osservate. Invece l'inclinazione e l'intensità orizzontale del magnetismo sono in stretto rapporto con la latitudine, la prima diminuendo col discendere da nord a sud, e la seconda aumentando; epperò nella sezione destra del quadro abbiamo disposto i nomi dei luoghi in ordine di latitudine decrescente ed abbiamo riportato i valori dell'inclinazione I e dell'intensità H.

Faccio presente che i valori qui comunicati sono quelli medii risultanti immediatamente dal calcolo delle misure fatte in ciascuna stazione, senza averli corretti per le variazioni magnetiche avvenute nel tempo (nel corso del giorno, o dell'anno, o magari per burrasche magnetiche sopraggiunte durante le esperienze); essi abbisognano ancora di essere ricondotti ad un'epoca fissa, comune per tutte le osservazioni successivamente raccolte nella plaga esplorata. Ciò non mancheremo di fare più tardi, allorquando saremo in possesso degli elementi necessari per siffatte riduzioni. Frattanto, per le ragioni già addotte nella precedente Nota sulle misure adriatiche e che qui non ripeto, possiamo — in prima e pur buona approssimazione — avvalerci degli attuali valori, sebbene non spogliati dalle variazioni corse nel tempo, per trarre qualche conclusione.

(1) A Roma volli ripetere le determinazioni nei due siti su indicati con A e B. Il punto A era stato scelto come stazione magnetica di Roma dagli americani Sligh e Wallis della *Carnegie Institution*, nel 1911 e nel 1913, ed anche il prof. Arturo Palagi vi aveva fatto alcune misure nel 1916. B è l'antica stazione magnetica occupata più volte dal prof. Chistoni e da me negli anni dal 1886 al 1905.

DETERMINAZIONI MAGNETICHE NELLA REGIONE MEDIO-TIRRENICA, 1922.

STAZIONI	Longitudine Est da Green. $\lambda$	Declinazione occidentale D	STAZIONI	Latitudine Nord $\varphi$	Inclinazione boreale I	Intensità orizzontale H
Capraia .....	9.50,6	7.36,4	Livorno .....	43.34,2	59.19,1	c. g. s. 0,22508
Gorgona .....	9.54,3	7.11,0	Gorgona .....	43.25,8	59.09,2	0,22657
Pianosa .....	10.05,9	7.57,5	Siena .....	43.18,8	59.00,5	0,22697
Marina di Campo	10.14,4	8.16,0	Campiglia Marit.	43.03,4	58.52,3	0,22770
Montecristo .....	10.17,8	8.08,2	Capraia .....	43.03,1	58.12,8	0,23137
Livorno .....	10.20,4	7.54,6	Marina di Campo	42.44,5	58.36,5	0,22786
Campiglia Marit.	10.36,8	7.48,8	Pianosa .....	42.35,3	58.23,1	0,22977
Giglio .....	10.55,4	6.38,1	Orbetello .....	42.26,5	58.11,2	0,23067
Orbetello .....	11.13,7	7.28,6	Giglio .....	42.21,4	58.05,7	0,23107
Siena .....	11.19,8	7.31,1	Montecristo .....	42.20,0	57.59,7	0,23141
Civitavecchia ...	11.47,9	7.14,4	Civitavecchia ...	42.06,0	57.46,1	0,23275
Roma (1), Staz. B	12.26,0	7.00,9	Roma (1), Staz. A	41.56,8	57.37,3	0,23407
Roma, Staz. A ..	12.27,3	6.58,2	Roma, Staz. B ..	41.53,6	57.35,8	0,23394
Zannone .....	13.03,6	6.40,9	Montecassino ...	41.29,3	57.02,6	0,23705
Terracina .....	13.14,3	6.41,5	Terracina .....	41.17,0	56.47,6	0,23766
Montecassino ...	13.48,7	6.25,7	Zannone .....	40.58,5	56.32,2	0,23900
Capri .....	14.13,9	6.17,8	Montevergine ...	40.55,9	56.22,5	0,24001
Montevergine ...	14.43,8	6.02,9	Capri .....	40.33,5	55.59,5	0,24114

(1) Le misure fatte nelle due stazioni A e B presso Roma sono riuscite in ottimo accordo fra loro. Le lievissime differenze fra i rispettivi valori della declinazione e dell'inclinazione corrispondono pure alle piccole differenze di coordinate fra i due luoghi, che distano in linea retta m. 6200. L'azione perturbatrice dei tramvai elettrici cittadini e suburbani non è giunta a farsi sentire sui nostri strumenti posti in A ed in B; la minima distanza di A dai tramvai è 1400 m. (piazzale di Ponte Milvio); B dista solo 550 m. dalla prossima stazione tramviaria (termine di linea alla Madonna del Riposo). Dalla concordanza dei valori in A ed in B dovremmo inferire che lo strato di tufo vulcanico costituente il suolo in B non eserciti influenza sensibile sul magnetometro perchè posto ad una certa altezza sul suo treppiede (m. 1,30); mentre non più trascurabile è l'azione sull'ago di una bussola che sia collocata a terra, come ebbe a constatare il Folgheraiter con appositi esperimenti (*Sulla scelta d'un terreno per osservazioni magneto-telluriche*, L'Elettrecista, anno II, n. 4; Roma 1893). Poichè le operazioni in A ed in B a Roma si svolsero intorno alla metà di dicembre 1922, possiamo assumere come valori degli elementi magnetici, a Roma e per l'epoca 1923,0, i risultati medi delle due nostre stazioni:

$$D = 7^{\circ} 0' W \quad ; \quad I = 57^{\circ} 36' N \quad ; \quad H = 0,23400 \text{ c. g. s.}$$

3. Basta gettare l'occhio sulle serie di valori di  $I$  e di  $H$  contenuti nel quadro, per riconoscere subito che Capraia non sta in rango con le altre stazioni, in quanto l'inclinazione vi è più bassa per quasi  $40'$  e l'intensità orizzontale più grande per circa  $350 \gamma$ , rispetto ai valori che competerebbero a Capraia per la sua posizione geografica. Ciò non deve recare meraviglia, giacchè Capraia è isola tutta vulcanica, la cui massa principale è costituita da trachiti ed andesiti: ed è ben noto che le rocce laviche, i materiali vulcanici in genere, hanno proprietà magnetiche e perturbano più o meno il campo terrestre, spesso con irregolarità palesi entro brevissime distanze. Se la mia fermata nell'isola non fosse stata limitata fra i due approdi settimanali del piroscafo postale, invece di fare stazione co' miei strumenti in un solo punto, volentieri avrei ripetuto le misure in punti diversi, per raccogliere saggi di tali irregolarità nella distribuzione del magnetismo terrestre. Simili ricerche speciali, per altro, non hanno molta importanza per chi attende ad un rilievo cartografico-magnetico su vasta scala, come nel caso mio; ed è per questa ragione che in generale ho evitato di fare stazione su suoli di nota natura litologica, da cui erano, a priori, da aspettarsi quelle perturbazioni a ristretto raggio d'azione, e quasi saltuarie da punto a punto, che son riferibili al cosiddetto *magnetismo di roccia*. Così, nel gruppo delle isole Pontine, quasi totalmente vulcaniche, sono andato a collocare la stazione nell'estremo nord (Capo Negro) dell'isolotto Zannone, su di una zona di calcare ove sorge il faro. Analogamente, volendo pur ottenere un punto magnetico di riferimento nell'Elba, ho scelto Marina di Campo, lontano dai giacimenti feriferi.

Tornando alla nostra tabella, aggiungo che pure l'isola di Gorgona presenta, in rapporto al valore della latitudine, il valore di  $I$  un pochino basso ed il valore di  $H$  alquanto superiore al normale, non tanto però da rompere l'ordine nella serie; trattasi di un'anomalia molto leggera, che non saprei qui dimostrare se non coll'aiuto di una cartina.

Dalla tabella poi è facile ricavare che, astraendo dall'anomalia forte di Capraia, l'inclinazione diminuisce di  $1^{\circ}.1$  (in media) scendendo da nord a sud per  $1^{\circ}$  di latitudine, e l'intensità orizzontale, per eguale spostamento, aumenta di  $535 \gamma$ ; questi rapporti coincidono perfettamente con quelli che abbiamo calcolato, l'anno precedente, dalle misure adriatiche.

4. Passiamo ora a considerare le declinazioni. Sono le isole toscane che offrono per la declinazione parecchie anomalie; alcune di queste si possono inferire dalla semplice ispezione dei numeri della tabella; altre si appalesano meglio su di una cartina provvisoria delle isogone della regione, che ho disegnata, ma che qui non posso riprodurre. Capraia ha dato un valore di  $D$  anormale per circa  $\frac{1}{2}$  grado in meno; Gorgona, quasi  $1^{\circ}$  in meno; Marina di Campo e Montecristo, da  $15'$  a  $20'$  in più, poca cosa invero; Giglio,



infine, 1° circa in meno <sup>(1)</sup>. La D di Pianosa, isola sedimentaria, può invece considerarsi come normale. La perturbazione in D a Capraia, sulla trachite, era ben da prevedersi; anzi non appare neanche molto forte. A Gorgona gli strumenti furono collocati su terreno, diciam così, magneticamente inerte, ma devono avere agito le non lontane formazioni serpentinosi e diabasiche dell'isola <sup>(2)</sup>. I vari campioni di granito da me raccolti e sperimentati a Montecristo ed a Giglio non mostravano la minima azione sull'ago del magnetometro e tuttavia vi ottenni valori anomali di D. In simili casi, ove mancano, alla superficie o nelle vicinanze, masse rocciose che ci diano ragione delle anomalie osservate, è lecito inferire l'esistenza di altre masse di sostanze ferromagnetiche, nascoste in profondità entro la crosta terrestre.

A parte le anomalie osservate, dai valori di D incolonnati nella tabella. deduciamo che la declinazione occidentale diminuisce andando verso est in ragione di 25' per 1° di longitudine; anche questo è lo stesso, preciso risultato già da noi ottenuto nell'esplorazione dell'Adriatico.

5. Lo studio delle variazioni magnetiche secolari, sulla scorta dei risultati del 1922 nelle stazioni ripetute, messi in confronto coi risultati delle epoche precedenti, sarà da noi compiuto in appresso, allorchè potremo lavorare sui valori definitivi delle nostre misure, assoggettati cioè a quelle riduzioni, di cui sopra si fece cenno, e per le quali occorrono le registrazioni continuate di un magnetografo. Tuttavia, sarà utile fin da ora stabilire un riscontro fra i nuovi valori ottenuti e quelli antichi che si possono desumere dalle nostre carte magnetiche costruite per l'epoca 1892,0. Poichè le recenti misure tirreniche furono fatte in mesi diversi del 1922, noi le riportiamo tutte alla fine dello stesso anno, cioè al tempo 1923,0, correggendole per minime quantità di variazione corrispondenti ai pochi decimi d'anno decorsi dai giorni delle misure nelle singole stazioni fino al compimento dello stesso 1922; quantità che deduciamo dallo studio delle variazioni fra alcune speciali serie di determinazioni magnetiche effettuate a Terracina, negli ultimi tempi.

Segue la tabella dei valori confrontati.

(<sup>1</sup>) Dicendo *più* o *meno*, intendo riferirmi al valore numerico, assoluto della declinazione, la quale è occidentale in Italia. Seguendo la convenzione in uso, alle declinazioni occidentali dovrebbe premettersi il segno —.

(<sup>2</sup>) La serpentina è notoriamente roccia magnetica, ed i pezzi di essa da me presi a Gorgona lo erano tutti fortemente. Invece, dei campioni di diabase prelevati in punti diversi, ne ho trovati alcuni magnetici ed altri no.

STAZIONI ripetute	DECLINAZIONE			INCLINAZIONE			INTENSITÀ ORIZZONTALE		
	1892,0	1923,0	Variazione 1892-1923	1892,0	1923,0	Variazione 1892-1923	1892,0	1923,0	Variazione 1892-1923
Livorno . . . .	11.30'	7.53'	— 3.37'	59.54'	59.19'	— 0.35'	0,2237	0,2250	+ 0,0013
Siena . . . . .	11.08	7.30	— 3.38	59.37	59.00	— 0.37	0,2257	0,2269	+ 0,0012
Campiglia . . .	11.25	7.46	— 3.39	59.32	58.52	— 0.40	0,2263	0,2277	+ 0,0014
Orbetello . . .	11.04	7.27	— 3.37	58.45	58.11	— 0.34	0,2293	0,2306	+ 0,0013
Civitavecchia	10.52	7.13	— 3.39	58.20	57.46	— 0.34	0,2313	0,2327	+ 0,0014
Roma . . . . .	10.41	7.00	— 3.41	58.07	57.36	— 0.31	0,2326	0,2340	+ 0,0014
Montecassino	10.01	6.23	— 3.38	57.29	57.03	— 0.26	0,2360	0,2370	+ 0,0010
Terracina . . .	10.15	6.36	— 3.39	57.23	56.48	— 0.35	0,2364	0,2376	+ 0,0012
Montevergine	9.41	6.00	— 3.41	56.47	56.23	— 0.24	0,2392	0,2400	+ 0,0008
Medie . . . . .			— 3.39			— 0.33			+ 0,0012

È ammirevole l'accordo che si nota fra le differenze che esprimono le variazioni avvenute tra gli anni 1892 e 1923 nelle varie località, specialmente per la declinazione e per la forza orizzontale. I numeri pertanto ci autorizzano a ritenere che il cambiamento degli elementi magnetici sia stato sensibilmente uniforme su tutta l'estensione del versante medio tirrenico testè esplorato; e prendendo le medie risultanti dalle 9 stazioni ripetute, concludiamo che la declinazione, nel detto territorio e per l'intervallo 1892-1923, è diminuita complessivamente di  $3^{\circ} 39'$ , l'inclinazione pure diminuita di  $33'$ , l'intensità orizzontale aumentata di 120 unità  $\gamma$ . Si sa bene che queste variazioni non si sono svolte uniformemente nel tempo; tuttavia daremo qui, in ultimo, i quozienti delle variazioni globali divise pel numero 31 di anni trascorsi, cioè le variazioni annuali medie, approssimate:

$$\Delta D = -7',0 \quad ; \quad \Delta I = -1',0 \quad ; \quad \Delta H = +4\gamma.$$

**Fisica.** — *Sulla diffusibilità dell'elio attraverso il vetro di Turingia.* Memoria del Socio A. PIUTTI e del dott. BOGGIOLERA.

Questo lavoro verrà inserito nei volumi delle Memorie.

# NOTE PRESENTATE DA SOCI

## Matematica. — Sulla curvatura conforme di una varietà.

Nota di ALDO FINZI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. È noto che al quadrato dell'elemento lineare di una qualunque  $V_n$  si connette un sistema quadruplo covariante, identicamente nullo per  $n \leq 3$ , e il cui annullarsi, per  $n > 3$ , è condizione necessaria e sufficiente affinché  $V_n$  sia rappresentabile conformemente sulla varietà euclidea ad  $n$  dimensioni <sup>(1)</sup>. Gli elementi di tale sistema, che indicheremo con  $L_{ijhk}$ , sono funzioni lineari dei simboli di Riemann di 1<sup>a</sup> specie, esprimibili nel modo seguente

$$(1) \quad L_{ijhk} = a_{ij,hk} + \frac{1}{2(n-1)(n-2)} (a_{ik}A_{jh} - a_{ih}A_{jk} + a_{jh}A_{ik} - a_{jk}A_{ih}),$$

quando si ponga

$$(2) \quad A_{ik} = a_{ik}G - 2(n-1)G_{ik},$$

essendo

$$(3) \quad G_{ik} = \sum_{jh}^n a^{(jh)} a_{ij,hk}, \quad G = \sum_{ik}^n a^{(ik)} G_{ik}.$$

In un libro molto interessante, testè pubblicato da D. J. Struick <sup>(2)</sup>, si attribuisce al sistema (1) anche il carattere invariantivo di fronte ad una trasformazione conforme di  $V_n$ ; ma l'affermazione dev'essere modificata, come subito vedremo.

2. Se  $V_n$  e  $V'_n$  sono due varietà in rappresentazione conforme fra loro, se cioè fra i coefficienti dei quadrati dei loro elementi lineari e fra i loro reciproci sussistono le relazioni

$$(4) \quad a'_{ik} = e^{2\tau} a_{ik}, \quad a'^{(ik)} = e^{-2\tau} a^{(ik)},$$

<sup>(1)</sup> J. A. Schouten, *Ueber die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung*. Mathem. Zeitschrift, Band 11, Heft. 1/2, 1921. — A. Finzi, *Sulle varietà in rappresentazione conforme con la varietà euclidea a più di tre dimensioni*. Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXXI, serie 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem. 1922.

<sup>(2)</sup> D. J. Struick, *Grundzüge der Mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung*. Berlin, J. Springer, 1922; cfr. pag. 152. Il libro è dedicato al Ricci, fondatore del Calcolo differenziale assoluto.



fra i simboli di Riemann di 1<sup>a</sup> specie ad esse relativi intercedono le seguenti <sup>(1)</sup>

$$(5) \quad e^{-2\tau} a'_{ij,hk} = a_{ij,hk} + a_{ik}(\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - a_{ih}(\tau_{jk} - \tau_j \tau_k) + \\ + a_{jh}(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) - a_{jk}(\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + (a_{ik} a_{jh} - a_{ih} a_{jk}) \Delta \tau.$$

Da queste, con l'impiego delle (3) e con la convenzione di distinguere le quantità omologhe di  $V_n$  e  $V'_n$ , accentuando queste ultime, ricaviamo

$$(6) \quad G'_{ik} = G_{ik} + (n-2)(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) + a_{ik} \Delta_2 \tau + (n-2) \Delta \tau \{,$$

$$(7) \quad e^{2\tau} G' = G + 2(n-1) \Delta_2 \tau + (n-1)(n-2) \Delta \tau.$$

Considerando le (5) come equazioni lineari nelle differenze  $\tau_{ik} - \tau_i \tau_k$ , le loro condizioni di compatibilità possono aversi, sostituendo a tali differenze, nelle (5) stesse, le espressioni

$$(8) \quad \tau_{ik} - \tau_i \tau_k = \frac{1}{2(n-1)(n-2)} (\mathcal{A}_{ik} - \mathcal{A}'_{ik}) - \frac{a_{ik}}{2} \Delta \tau,$$

che si ricavano, con l'impiego delle posizioni (2), dalle (5), (6) e (7). Facendo tale sostituzione e ricordando le (1), si perviene alle relazioni

$$(9) \quad L'_{ijhk} = e^{2\tau} L_{ijhk},$$

dalle quali si rileva che manca nelle  $L_{ijhk}$  il carattere invariantivo per una trasformazione conforme di  $V_n$ .

Se però moltiplichiamo i due membri delle (9) per  $a'^{(jl)}$  e sommiamo rispetto a  $j$  da 1 ad  $n$ , tenendo conto delle (4), riconosciamo che tale carattere spetta invece al sistema misto  $\sum_{j=1}^n a'^{(jl)} L_{ijhk}$ , i cui elementi, con le (1), hanno le seguenti espressioni

$$(10) \quad \sum_{j=1}^n a'^{(jl)} L_{ijhk} = \{i l, h k\} + \frac{1}{2(n-1)(n-2)} \left[ \varepsilon_h^{(l)} \mathcal{A}_{ik} - \varepsilon_k^{(l)} \mathcal{A}_{ih} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n a'^{(jl)} (a_{ik} \mathcal{A}_{jh} - a_{ih} \mathcal{A}_{jk}) \right],$$

nelle quali intervengono i simboli di Riemann di 2<sup>a</sup> specie e i simboli  $\varepsilon_k^{(l)}$  rappresentano l'unità o lo zero, secondochè  $h = l$  o  $h \neq l$ .

Il sistema misto ora considerato ha poi, evidentemente, le proprietà ricordate in principio del sistema  $L_{ijhk}$ ; a quello però e non a questo è da attribuirsi, col Weyl, la denominazione di *curvatura conforme* di  $V_n$ .

3. I secondi membri delle (1) e (10) diventano molto semplici, quando, per la  $V_n$  che si considera, si abbiano le relazioni

$$G_{ih} = \lambda a_{ik}, \quad \text{e quindi le altre} \quad G = n\lambda, \quad \mathcal{A}_{ik} = (2-n) \lambda a_{ik}.$$

<sup>(1)</sup> T. Levi-Civita, *ds<sup>2</sup> einsteiniani in campi newtoniani*; III. *Formole ausiliarie*. R. Acc. Lincei, vol. XXVII, serie 5<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> sem., 1917. Cfr. pag. 187.

Si ha allora

$$(1') \quad L_{ijhk} = a_{ij,hk} - \frac{\lambda}{n-1} (a_{ik} a_{jh} - a_{ih} a_{jk}),$$

$$(10') \quad \sum_{l,j} a^{(jl)} L_{ijhk} = \{il, hk\} - \frac{\lambda}{n-1} (a_{ik} \varepsilon_h^{(l)} - a_{ih} \varepsilon_k^{(l)}).$$

Dalle (1') si riconosce, come fu rilevato da Schouten e Struick <sup>(1)</sup>, che ogni  $V_3$  per cui sia  $G_{ik} = \lambda a_{ik}$  è a curvatura costante, e che le  $V_n (n > 3)$  in rappresentazione conforme con la varietà euclidea e per le quali sia  $G_{ik} = \lambda a_{ik}$ , sono pure a curvatura costante. In particolare, se  $\lambda = 0$ , la curvatura è nulla.

Dalle (10') si rileva che per ogni  $V_n (n > 3)$ , con  $G_{ik} = 0$ , la curvatura conforme è data dai simboli di Riemann di 2<sup>a</sup> specie <sup>(2)</sup>.

4. Il sistema triplo covariante definito dalle posizioni

$$A_{ikl} = A_{ihl} - A_{ilk},$$

che è nullo per ogni  $V_n$  in rappresentazione conforme con la varietà euclidea, e il cui annullarsi anzi, per  $n = 3$ , esprime la condizione necessaria e sufficiente per la rappresentazione conforme sullo spazio ordinario, quando  $n = 3$  è invariante di fronte ad una trasformazione conforme della varietà a cui si riferisce, ma cessa di esserlo per  $n > 3$ . Per mostrare ciò procediamo alla ricerca delle condizioni d'integrabilità delle (8).

Se deriviamo tali equazioni ed eliminiamo le derivate terze della  $\tau$  con le note formole d'inversione e le derivate seconde con le (8) stesse, con calcoli analoghi a quelli svolti in altro lavoro <sup>(3)</sup>, perveniamo alle relazioni <sup>(4)</sup>

$$(11) \quad A'_{ikl} = A_{ikl} - 2(n-1)(n-2) \sum_{1,r} \tau^{(r)} L_{rikl},$$

nelle quali apparisce ancora la funzione  $\tau$ .

<sup>(1)</sup> J. A. Schouten and D. J. Struick, *On some properties of general manifolds relating to Einsteins theory of gravitation* American Journal of Mathem., vol. XLIII, 4 oct. 1921.

<sup>(2)</sup> Nella Nota appena citata di Schouten e Struick è contenuta la proposizione: se due  $V_n$ , con  $G_{ik} = 0$ , sono rappresentabili conformemente l'una sull'altra, sono uguali i loro simboli di Riemann di 1<sup>a</sup> specie. L'equivoco degli Autori proviene dall'omissione del fattore corrispondente al nostro  $e^{-2\tau}$  nella formola da cui parte la loro dimostrazione formola che corrisponde alla nostra (5).

<sup>(3)</sup> A. Finzi, *Sulla rappresentabilità conforme di due varietà ad  $n$  dimensioni l'una sull'altra*. Atti del R. Ist. Veneto, tomo LXXX, parte 2<sup>a</sup>, 1921.

<sup>(4)</sup> In conformità di queste nostre (11) devono essere modificate le (144) di pag. 152 del libro citato dello Struick.

Osserviamo qui che la nostra Nota, appena richiamata, si chiude con una proposizione che non discorda dalle relazioni (11), ora stabilite, ma che, per l'ipotesi restrittiva in essa contenuta, per  $n = 3$  si traduce senz'altro nelle (12) e per  $n > 3$  perde significato.

Quando  $n = 3$  i coefficienti delle  $\tau^{(r)}$  nei secondi membri delle precedenti sono identicamente nulli, e nelle

$$(12) \quad A'_{ikl} = A_{ikl},$$

che se ne deducono, si hanno le condizioni d'integrabilità delle (8).

L'invarianza del sistema  $A_{rst}(n=3)$  per una trasformazione conforme della varietà a cui si connette, era nota; ma la deduzione che qui abbiamo fatto delle (12) attribuisce a queste equazioni il carattere di condizioni, non solo necessarie, ma anche *sufficienti* per la rappresentabilità conforme di due varietà a tre dimensioni l'una sull'altra.

**Meccanica.** — *Di un paradosso d'attrito.* Nota di CLEMENTINA MELLI, presentata dal Socio G. A. MAGGI.

Lo studio teorico del movimento di un albero (cilindro rotondo) omogeneo, pesante, che ruota rapidamente intorno al proprio asse, posato orizzontalmente sopra due cuscinetti. (tangente internamente ad una superficie cilindrica rotonda) con attrito radente, dà per risultato una serie di oscillazioni dell'asse, tendenti, col crescere del tempo, al riposo, in quella posizione che si suol determinare direttamente, impostando la ricerca sotto il puro aspetto statico. Ho sviluppato questo studio in un breve articolo destinato al « Nuovo Cimento ». In questa assai più breve Nota mi limito a quanto concerne una circostanza del suddetto movimento dell'asse dell'albero, che non mi sembra immeritevole d'attenzione: *l'attrito che promuove il movimento.*

La posizione del mobile, ad ogni istante, si può definire per mezzo di due coordinate libere: le misure  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , dell'angolo che fornisce l'azimut del cilindro mobile, e dell'angolo formato dal semipiano terminato all'asse del cilindro fisso, contenente l'asse del cilindro mobile, col semipiano verticale volto in basso, da intendersi ambedue crescenti rispetto ad un senso concorde dei relativi assi.

Valendosi della seconda forma delle equazioni dinamiche di Lagrange, o formando le equazioni pure corrispondenti ai relativi atti di movimento virtuale, posto

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt},$$

si trovano le equazioni differenziali del movimento

$$(1) \quad ma \frac{d\omega_2}{dt} = -mg \sin \varphi_2 - \frac{V}{|V|} \mu R'$$

$$(2) \quad I \frac{d(\omega_1 + \omega_2)}{dt} = M^* - r \frac{V}{|V|} \mu R'$$



dove  $m, r$  e  $I$  indicano la massa, il raggio e il momento d'inerzia, rispetto all'asse, del cilindro mobile,  $a$  la distanza dei due assi,  $M^*$  il momento, rispetto all'asse del cilindro mobile, delle azioni motrici e delle resistenze, oltre l'attrito radente, il cui risultante è supposto nullo,  $R'$  la grandezza del risultante delle pressioni vincolari normali, nei punti della generatrice di contatto; infine posto:

$$V = r(\omega_1 + \omega_2) + a\omega_2,$$

con che  $V$  rappresenta la misura della velocità dei suddetti punti di contatto, secondo la tangente alla sezione verticale, volta nel senso in cui è inteso crescere la misura  $\varphi_2$ .

Eliminando nella (1) il fattore,  $R'$ , per mezzo di:

$$ma\omega_2^2 = -mg \cos \varphi_2 + R'$$

si ottiene,

$$(3) \quad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{g}{a} \left( \sin \varphi_2 + \frac{V}{|V|} \cos \varphi_2 \right) - \frac{V}{|V|} \mu \omega_2^2,$$

alla quale vanno aggiunte le condizioni iniziali:

$$\text{per } t=0: \quad \varphi_2=0 \quad \omega_2=0, \text{ con l'ipotesi}$$

$$\text{per } t=0: \quad \omega_1 > 0$$

vale a dire iniziato il movimento rotatorio del cilindro mobile attorno al proprio asse, mentre questo, in riposo, trovasi nella posizione più bassa possibile; con ciò la pressione d'attrito non è nulla per  $t=0$  ed il cilindro mobile abbandona la suddetta posizione.

Dalle condizioni iniziali, invocando il confronto con la analoga equazione differenziale del pendolo piano, si deduce che  $|\omega_2|$  si manterrà costantemente piccolo, per cui, supponendo d'altra parte che  $\omega_1$  si mantenga positivo e notevolmente grande, potremo intendere che si mantenga  $V > 0$ , e per (3) scrivere:

$$(4) \quad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{g}{a} (\sin \varphi_2 + \mu \cos \varphi_2) - \mu \omega_2^2.$$

La posizione d'equilibrio dell'asse del cilindro mobile si deduce da (4) facendovi  $\omega_2 = 0$ ,  $\frac{d\omega_2}{dt} = 0$ ; con che risulta il relativo valore di  $\varphi_2$  fornito da

$$\sin \varphi_2 + \mu \cos \varphi_2 = 0.$$

Sia  $-\alpha$  il valore compreso fra 0 e  $-\pi$  che verifica la suddetta equazione, avremo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu, \quad \text{per cui la (4) diviene:}$$

$$(5) \quad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{g}{a} \frac{1}{\cos \alpha} \sin (\varphi_2 + \alpha) - \mu \omega_2^2$$

la quale, posto  $\frac{g}{\cos \alpha} = \gamma$ , e  $\varphi_2 + \alpha = \theta$ , si trasforma in:

$$(6) \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \mu \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{\gamma}{a} \sin \theta = 0,$$

e le condizioni iniziali, che valevano per la (3), divengono per questa:  
per  $t = 0$ :  $\theta = \alpha$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ .

Osservando la (6), si vede che ha la forma di quella equazione che rappresenta il movimento del pendolo nel mezzo resistente, nell'ipotesi che la resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità, colla differenza, che, mentre in quella si passa dal movimento ascendente a quello discendente cambiando il segno al coefficiente di  $\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$ , in questa detto segno rimane invariato, nella premessa ipotesi che sia sempre  $V > 0$ . Per cui, integrando la (6) con i metodi usati per l'integrazione delle equazioni di quel tipo <sup>(1)</sup>, e tenendo presente l'invariabilità del suddetto segno, potremo determinare e confrontare le ampiezze di  $\theta$  al termine delle successive semioscillazioni.

Indicando con  $\theta = -\alpha_1$ ,  $\theta = \alpha_2$ , le ampiezze di  $\theta$  al termine della prima e della seconda semioscillazione, integrando la (6) con i metodi detti, e trascurando nei calcoli la seconda potenza di  $\mu$  che abbiamo supposto molto piccolo, sono giunta ai risultati:

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{4\mu}{\sin \alpha} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha),$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{4\mu}{\sin \alpha_1} (\sin \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_1),$$

i quali, sviluppando seno e coseno, e trascurando la quarta potenza di  $\alpha$  nel valore di  $\alpha_1$ , e la quarta potenza di  $\alpha_1$  nel valore di  $\alpha_2$ , divengono:

$$(7) \quad \alpha_1 = \alpha + \frac{4}{3} \mu \alpha^2 \quad ; \quad (8) \quad \alpha_2 = \alpha_1 - \frac{4}{3} \mu \alpha_1^2.$$

La (7) esprime che l'ampiezza di  $\theta$  al termine del movimento ascendente è aumentata della quantità  $\frac{4}{3} \mu \alpha^2$ , e la (8) che la stessa ampiezza, al termine del movimento discendente, è diminuita della quantità  $\frac{4}{3} \mu \alpha_1^2$ .

(1) Cfr. Jullien, *Problèmes de Mécanique*, t. I, pag. 423.

Risulta così che, nella prima fase una forza promuove il movimento, nella seconda, lo contrasta; e poichè il senso del movimento ascendente, conforme alle condizioni iniziali, è quello negativo, ossia quello della pressione d'attrito, mentre il senso del movimento discendente è quello positivo, potremo concludere che, nel primo caso, la *pressione d'attrito promuove il movimento* dell'asse del cilindro mobile, nel secondo lo contrasta.

Introducendo infine (7) in (8), otteniamo:

$$(9) \quad \alpha_2 = \alpha - \frac{32}{9} \mu^2 \alpha^3,$$

dalla quale si desume che il movimento oscillatorio, dopo una serie di oscillazioni, sensibilmente si estingue.

**Fisica matematica.** — *Sull'interpretazione del Principio della Relatività ristretta nella fisica classica.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio A. DI LEGGE.

Discutendo i fondamenti della teoria della relatività ristretta, varî autori affermano chiaramente, altri lasciano sottintendere, che per render conto di quel *principio di relatività* che l'esperienza ha dimostrato esistere, oltre che per i fenomeni meccanici, anche per quelli elettromagnetici, sia assolutamente necessario abbandonare lo sfondo classico della fisica ed assumere in sua vece quello einsteiniano.

Per quanto io pensi che coloro che hanno seguito con sufficiente senso fisico lo sviluppo di queste teorie debbano esser convinti che quest'affermazione sia fondata su un'equivoco, credo conveniente, dato il ripetersi di essa, anche in recenti trattati di notevole importanza, di trattare brevemente in questa Nota la delicata questione.

Ricerco perciò dapprima la causa dell'equivoco, che non esito ad attribuire ad un'erronea valutazione dal fatto che non sia mai stata data *neppur una* completa interpretazione esplicita, quasi direi meccanica, del principio di relatività nello sfondo classico.

In seguito, pur osservando che la rilevata deficienza non dimostra ancora affatto l'impossibilità di poter interpretare il principio secondo la fisica classica, tronco senz'altro la questione deducendo *una completa interpretazione esplicita*, che, come d'altra parte era prevedibile, non è neppur *meccanica*, ma semplicemente *cinematica*.

In questo modo credo colmata una piccola lacuna, che era però una non dubbia causa di errata valutazione del significato fisico della teoria della relatività.



1. *Interpretazione di singole esperienze.* — Durante il secolo passato la fisica si è ripetutamente trovata nella necessità di render conto dell'esito negativo di vari tentativi (diretti e indiretti) di risolvere il problema di determinare il moto di un sistema relativamente all'etere, problema che aveva naturalmente preso consistenza fin da quando essa aveva creduto opportuno di invocare l'esistenza di questo mezzo per riferirvi i suoi fenomeni.

Nel far ciò ha seguito sempre uno stesso concetto fondamentale, tanto che si trattasse dell'etere elastico, quanto dell'etere sede dei fenomeni elettromagnetici.

La teoria faceva prevedere un effetto atto a porre in evidenza il moto di un sistema; l'effetto non si riscontrava in realtà; ciò doveva interpretarsi ammettendo che si fosse prodotto un nuovo fenomeno secondario tale da compensare esattamente l'effetto previsto dalla teoria.

È noto che seguendo questo criterio si interpretò facilmente l'assenza di effetti del primo ordine (proporzionali a  $v/c$ , con  $v$  velocità del sistema relativamente all'etere e  $c$  velocità della luce nell'etere stesso); ma che solo più difficilmente il Lorentz, coll'*ipotesi della contrazione*, riuscì a interpretare l'assenza dei fenomeni del secondo ordine in tutto un ampio gruppo di possibili esperienze, fra le quali erano comprese *tutte quelle fino allora eseguite*.

2. *Principio di relatività e sua interpretazione formale.* — Ma frattanto, per il moltiplicarsi delle esperienze coll'identico risultato negativo, la constatata impossibilità aveva raggiunto il valore di un *principio della natura*. Si era così resa desiderabile — quasi direi imposta — la ricerca di un'interpretazione che valesse per *tutte le esperienze immaginabili* e per *qualsiasi ordine di effetto prevedibile*.

Fu ancora il Lorentz che risolse la questione, però con un metodo eminentemente più formale dei precedenti.

Il concetto del Lorentz, perfezionato in qualche dettaglio dal Poincaré, si può riassumere così: se una traslazione uniforme di tutto il sistema lascia invariata l'apparenza di tutti i fenomeni che possono ricondursi ad azioni elettromagnetiche, deve necessariamente esistere una trasformazione che lascia invariate le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo. Supponendo l'asse delle  $x$  di un sistema cartesiano orientato secondo la direzione della traslazione, tale trasformazione è notoriamente

$$1) \quad x' = \kappa(x - vt) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = \kappa \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad , \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Come si sa, considerando la velocità  $v$  come un parametro variabile, tutte le trasformazioni di questo tipo formano un gruppo continuo, purchè si ammetta per la  $v$  la legge di composizione:  $v_{1,2} = (v_1 + v_2) / \left( 1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right)$ .

Ora per render conto *formalmente* del principio di relatività basterà ammettere che, per trasformare le equazioni che descrivono un fenomeno fisico qualsiasi in un sistema fisso relativamente all'etere, nelle corrispondenti equazioni dello stesso fenomeno in un sistema in moto traslatorio rispetto all'etere, si debbano usare le equazioni 1), anzichè le solite equazioni galileiane:

$$2) \quad x'' = x - vt, \quad y'' = y, \quad z'' = z, \quad t'' = t.$$

3. *Interpretazione fisica della trasformazione 1) secondo lo schema classico.* — Per ogni valore di  $v$  possiamo operare la trasformazione 1) in due volte, eseguendo dapprima la trasformazione galileiana 2) e poscia la trasformazione:

$$3) \quad x' = \kappa x'', \quad y' = y'', \quad z' = z'', \quad t' = \kappa \left( t'' - \frac{vx''}{c^2} \right),$$

o viceversa. Il risultato finale sarà identico.

Ma se le equazioni 1) rappresentano la trasformazione che lascia invariata l'espressione dei fenomeni fisici, — e la 2) la trasformazione che corrisponde ad una *traslazione pura* (cioè una traslazione che si suppone non provochi altri fenomeni secondari), e che quindi, applicata alle equazioni dei fenomeni fisici, pone solamente in evidenza gli effetti diretti di questa traslazione sopra quelle equazioni, — le 3) costituiranno necessariamente la trasformazione che pone in evidenza gli effetti dei fenomeni secondari, che si deve supporre accompagnino la traslazione, perchè possa sussistere il principio di relatività. In tal senso le 3) potranno esser considerate come la trasformazione che corrisponde ai detti fenomeni secondari, nella stessa guisa che le 2) corrispondono alla traslazione pura.

Queste teorie si sono svolte in un periodo di tempo in cui la fisica teorica considerava essenziale possedere buone espressioni formali dei fenomeni, ma quasi indifferente, o almeno non essenziale, conoscerne delle interpretazioni meccaniche. Ma nondimeno quei fisici che avevano persino creduto opportuno studiare delle interpretazioni molecolari dell'ipotesi della contrazione, avrebbero certamente cercato anche qualche interpretazione meccanica delle equazioni 3), se non fosse improvvisamente avvenuta la grande evoluzione nelle idee fondamentali determinata dall'Einstein.

4. *Interpretazione einsteiniana della trasformazione 1).* — L'idea fondamentale dell'Einstein, come è notissimo, è quella di interpretare il principio di relatività, anzichè come una conseguenza di ipotetici fenomeni, escogitati appunto a quello scopo, come la necessaria conseguenza degli stessi nostri concetti fondamentali di spazio e di tempo debitamente intesi. Allora le equazioni 1) divengono automaticamente quelle che corrispondono alla traslazione pura, precisamente come lo sono le 2) nella concezione classica, e quindi non è più necessario supporre che si producano altri fenomeni fisici secondari.

Entrati in quest'ordine di idee, l'etere diviene un secondo *corpo*  $\alpha$  persino indefinibile e la ricerca precedente perde ogni senso fisico. Ciò però non significa affatto che essa sia impossibile nell'ordine delle idee classiche e di fatto non lo è perchè è risolta dalle equazioni 3).

5. *Un'interpretazione meccanica completa.* — Le equazioni 3) sono pure suscettibili di un'interpretazione meccanica abbastanza semplice. La prima di esse rappresenta null'altro che l'ipotesi della contrazione, come aveva rilevato pure il Lorentz, che aveva effettivamente sempre ragionato su equazioni equivalenti alle 3) e non alle 1), come ordinariamente si crede. La quarta delle 3) rappresenta, a meno del fattore  $\kappa$ , la variabile ausiliaria, che il Lorentz aveva detta *tempo locale*, e impiegata come un puro artificio matematico. Quest'equazione è appunto quella che d'ordinario genera l'equivoco rilevato in principio, perchè fa apparire l'ipotetico fenomeno fisico che si dovrebbe ammettere per giustificare il principio di relatività, e che essa dovrebbe esprimere, come dipendente da un punto di riferimento nel sistema fisso, punto che potremmo scegliere ad arbitrio. Ora se ciò dovesse realmente verificarsi, sarebbe in stridente contrasto col carattere di intrinsecità che siamo soliti ad attribuire a tutti i fenomeni fisici.

Ma questo è solo apparente. Basta infatti eliminare la  $x$  per mezzo della 1<sup>a</sup> e della 4<sup>a</sup> delle 2) per avere

$$t' = \kappa \left[ t'' - \left( \frac{v}{c^2} x'' + vt'' \right) \right] = \frac{1}{\kappa} t'' - \kappa \frac{v}{c^2} x'',$$

cioè un'equazione che determina  $t'$  in funzione solamente di costanti e di quantità intrinseche del sistema mobile.

I due termini di cui si compone la quantità  $t'$  sono di facile interpretazione meccanica.

Infatti il primo esprime che la durata di tutti i fenomeni temporali, in conseguenza del movimento rispetto all'etere, debba essere uniformemente *rallentato*; ipotesi questa che non ha nulla di più insolito di quella della uniforme contrazione. Quantitativamente tale rallentamento è un *effetto del second'ordine*.

Il secondo termine invece ci dice che nel sistema in movimento si produce anche un *effetto di prim'ordine* e quindi, per le velocità ordinarie, enormemente prevalente sul precedente.

Per esso, l'osservatore posto nel luogo  $x'' = 0$  giudicherà un fenomeno temporale che si produca nel luogo di coordinate  $x''$ , come se esso, per effetto del moto, fosse anticipato di un tempo proporzionale alla velocità del sistema e a quella coordinata.

Così se egli osserverà fenomeni assolutamente contemporanei, ossia contemporanei relativamente al sistema privilegiato *etere*, li vedrà invece anticipati guardando nel senso del movimento e ritardati nell'altro.



Se egli osserverà un fenomeno periodico lo vedrà come se esso fosse sfasato in quella stessa direzione e tempo. Non è difficile di dare interpretazioni meccaniche di fenomeni di questo tipo. Basterà ricordare, per es., gli andamenti di certe oscillazioni elettriche in conduttori di capacità e auto-induzioni non trascurabili.

Se poi volessimo proprio ricondurre la misura del tempo alla marcia di orologi ideali distribuiti lungo l'asse delle  $x''$ , basterà pensare che il sistema in movimento acquisti, relativamente alla visione dei quadranti degli orologi, un potere rotatorio proporzionale alla velocità del sistema e alla distanza dalla quale si guarda l'orologio stesso; precisamente come uno strato di soluzione zuccherina manifesta un potere rotatorio relativamente al piano di polarizzazione della luce, proporzionale alla sua concentrazione e al suo spessore. Questo sfasamento del tempo lungo l'asse delle  $x''$  determina la posizione dei quadranti a meno di una qualsiasi rotazione comune. Possiamo quindi ancora porre la condizione che gli orologi del sistema mobile, che passano innanzi a quello dell'origine nel sistema fisso, debbono sempre essere in fase con esso. Sarà allora indipendente dal tempo anche lo sfasamento fra ciascun orologio del sistema fisso e tutti gli orologi del sistema mobile che gli passeranno innanzi, come è facile verificare.

Possiamo quindi concludere che, ammettendo che si producano nel sistema in movimento i due fenomeni fisici del second'ordine della contrazione delle lunghezze e del rallentamento dei fenomeni temporali, e quello del prim'ordine dello sfasamento di questi ultimi (tutti fenomeni assolutamente intrinseci di quel sistema e per nulla dipendenti da arbitrarie scelte di punti di riferimento), si rende perfettamente conto, nello sfondo della fisica classica, del fatto che un osservatore nel sistema in moto non possa in alcun modo riscontrare il proprio movimento.

**Fisica.** — *Esperienze di fotoelettricità* <sup>(1)</sup>. Nota di SEB. TIMPANARO, presentata dal Corrisp. P. CARDANI.

Il campo favorevole alla corrente fotoelettrica si può evidentemente creare sia dando al corpo illuminato dai raggi ultravioletti una carica negativa, sia mettendo in presenza di esso, in posizione opportuna, una lastra o una reticella carica positivamente. Il Cardani <sup>(2)</sup> ha avuto l'idea di creare il campo per mezzo di un disco di ebanite. Si arma il disco con una lastra metallica e, tenendo l'armatura a terra, si batte con un panno di lana la faccia libera. Invertendo poi le facce, cioè mettendo in contatto con l'armatura e nello stesso tempo a terra la faccia battuta, l'altra presenterà, com'è

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Parma.

<sup>(2)</sup> Questi Rendiconti, 1921, II, pag. 478.

noto, una carica positiva e per conseguenza potrà essere utilizzata per creare il campo che favorisca la corrente fotoelettrica.

Questa disposizione, che è comodissima perchè consente di ottenere campi intensi con grande semplicità di mezzi, si presta assai bene, com'è facile immaginare, anche per la dimostrazione della fotoelettricità dei liquidi e -e degl'isolanti.

Come sorgente di raggi ultravioletti, ho adoperato, con ottimi risultati, una lampada Heraeus piccola, alimentata da una corrente di 1,6 ampères.

I dischi isolanti (di ebanite o più spesso di zolfo) adoperati per creare il campo, avevano il diametro di 20 cm. e lo spessore di 1 cm.; la distanza della lampada dal corpo sottoposto all'esperienza era di 55 cm.; quella della scala dallo specchietto di m. 1,50. Il disco isolante carico positivamente era tenuto a 25 cm. dal corpo illuminato dai raggi ultravioletti. L'elettrometro aveva la sensibilità di 40 divisioni (di 2 mm. ciascuna) per volta.

Prima d'ogni esperienza, è bene assicurarsi che se s'illumina coi raggi ultravioletti un disco metallico smerigliato di fresco e messo in comunicazione con l'ago dell'elettrometro, l'immagine della scala esca dal campo del cannocchiale in pochi secondi e che rimanga invece ferma se s'intercetta la luce ultravioletta.

\* \* \*

Per dimostrare la fotoelettricità dei liquidi, basta metterli in una bacinella metallica isolata e in comunicazione con l'elettrometro e fare in modo, valendosi di schermi opportuni, che la luce ultravioletta, sia diretta che riflessa o diffusa, non investa nè la bacinella, nè il filo di comunicazione con l'elettrometro, nè l'elettrometro stesso. Si può anche mettere al riparo dai raggi ultravioletti soltanto l'elettrometro e rendere praticamente non fotoelettrici, per esempio ricoprendoli con sego, sia la bacinella che il filo di comunicazione. Io mi sono pure valso di una vecchia bacinella di alluminio e, in altre esperienze, di piatti di terraglia praticamente insensibili. Per esser sicuri che questa condizione sia soddisfatta, basta che l'elettrometro isolato rimanga fermo se al posto della superficie liquida colpita dai raggi ultravioletti si mette un dischetto metallico ricoperto di sego o un altro corpo non fotoelettrico.

Si ottengono ottimi risultati col mercurio pulito e con soluzioni acquose, anche diluite, d'idrochinone, di fucsina, di eosina; risultati sensibili con soluzioni acquose di cloruro rameoso e rameico, con l'acido solforico e con l'olio di ricino.

Si ottiene inoltre assai nettamente il fenomeno scoperto dal Rohde nella fucsina e nel violetto di metile, cioè l'aumento del potere fotoelettrico col tempo<sup>(1)</sup>; anzi ho potuto constatare cotesto aumento anche nelle soluzioni d'idrochinone nelle quali ritengo non sia stato mai accertato.

(1) Annalen der Physik, XIX, 1906, pp. 935-952.

\* \* \*

Per dimostrare la fotoelettricità degl'isolanti solidi, si può ricoprire il piatto metallico in comunicazione con l'elettrometro con uno strato sottile (o una lastra) dell'isolante. Il fenomeno si ottiene con la gommalacca, la pece greca, lo zolfo e, in misura minore, col vetro; ma è molto piccolo. Si può però intensificarlo adoperando l'elettrometro col metodo di Lord Kelvin e utilizzando, per farlo deviare, sia la carica positiva che quella negativa. Basta mettere il corpo illuminato in comunicazione con una coppia di quadranti e l'armatura della lastra isolante con l'altra coppia. S'intende che occorre un doppio interruttore che consenta l'isolamento contemporaneo del piattello illuminato e dell'armatura del disco isolante.

\* \* \*

Un'esperienza adattissima per dimostrazioni si può fare con un elettroscopio a una sola foglia di fronte alla quale sia stato posto un piattello metallico isolato. Se si mette il corpo illuminato (preferibilmente una lastra metallica) in comunicazione con la foglia e l'armatura della lastra isolante in comunicazione col piattello isolato dell'elettroscopio, la foglia si carica (di elettricità positiva) e, venendo a contatto col piattello su cui si è intanto accumulata una carica negativa, si scarica, funzionando così da orologio di Rayleigh-Righi.

\* \* \*

Le limature metalliche (di rame, zinco, alluminio, ferro) e quelle di carbone, anche a grana grossa, presentano un effetto fotoelettrico meno intenso dei rispettivi corpi allo stato di lastre.

Il fenomeno che non mi consta sia stato mai osservato, è perfettamente analogo a quello scoperto dal Rohde sulle polveri delle sostanze coloranti e dei solfuri metallici <sup>(1)</sup> e si può spiegare con l'ipotesi fatta dallo stesso Rohde, cioè ammettendo che, sotto forma di limatura, i corpi abbiano una superficie attiva, dal punto di vista fotoelettrico, minore che allo stato compatto: e precisamente quella costituita dall'insieme dei punti più elevati nei quali terminano le linee di forza del campo elettrico applicato.

(<sup>1</sup>) Ibid, pp. 950 e 956



**Fisica terrestre. — Il notevole telesismo del 3 febbraio 1923.**  
Nota di G. AGAMENNONE, presentata dal Socio V. CERULLI.

Grazie alla sempre crescente sensibilità dei moderni sismografi, diventano sempre più numerose le registrazioni di terremoti più o meno lontani, le quali raggiungono spesso ragguardevoli ampiezze e fanno erroneamente credere ad una accresciuta attività sismica della Terra, mentre si tratta, in realtà, di fenomeni tellurici che avrebbero appena perturbati i sismografi di 20-30 anni fa, seppure non li avessero lasciati del tutto indisturbati! Il passato mese di febbraio è stato in particolar modo ricco in telesismi i quali hanno dato molto lavoro ai nostri osservatori. Non volendo citare che quelli di maggiore importanza, ricorderò il telesismo delle  $19^h \frac{3}{4}$  e. (Gr.) del 1° febr.; i due telesismi intorno  $1^h \frac{1}{4}$  e  $5^h \frac{1}{4}$  del 2, dei quali l'ultimo con probabile epicentro nelle Isole Kurili; quello verso  $16^h \frac{1}{4}$  del 3 che forma l'oggetto di questa Nota ed ebbe varie repliche a brevi intervalli, mantenendo perturbati i più delicati sismografi fin oltre le  $21^h \frac{1}{2}$ ; l'altro verso le  $15^h \frac{1}{2}$  del 6, dovuto ad una forte scossa nella Bosnia; quello verso  $23^h \frac{1}{2}$  dell'11; quello verso  $2^h \frac{1}{4}$  del 12 con presunta origine presso le Isole Aleutine; quello verso  $17^h \frac{1}{4}$  del 13; quello verso  $10^h \frac{1}{2}$  del 16; infine, il notevolissimo intorno  $8^h \frac{3}{4}$  del 24 che sembra provenuto dall'Alaska ad una distanza da *Strasburgo*, stimata di 8380 km., da *Rocca di Papa* di 8500-9000 km., da *Belgrado* di 8900 km., e da *Faenza* di 9000 km., mentre un altro osservatorio italiano ne aveva posto l'epicentro nell'Oceano Indiano, ad una distanza di soli 5000-6000 km.

È mio intendimento soffermarmi al telesismo del 3 febr. che fu d'insolita violenza, tanto che le penne degli strumenti di Washington e dell'Università di Fordham (New-York) e così pure di molti osservatori europei, tra cui quelli di *Rocca di Papa*, *Firenze*, *Faenza* ecc., uscirono dalle zone sismografiche. Nel seguente prospetto riporto le ore esatte dell'inizio dei sismogrammi, disposte in ordine crescente con accanto il nome della località, l'intervallo di tempo (S-P) tra l'arrivo S delle onde trasversali e quello P delle longitudinali, la corrispondente distanza dell'epicentro presa nella tabella del Zeissig e, infine, la direzione in cui furono stimate provenire le onde sismiche <sup>(1)</sup>:

(<sup>1</sup>) I dati orari sono stati tratti quasi tutti dai Bollettini provvisori degli Uffici Centrali sismologici di *Strasburgo* e *Zurigo*. Di molti altri osservatori italiani si conoscono fino ad oggi soltanto le ore più o meno approssimate, ad eccezione di quella di *Catania* ( $16^h 10^m 44^s$ ) che anticipa troppo, mentre ritarda assai quella di *Firenze*, comunicata ai giornali dall'Osservatorio Ximeniano; ragione per cui non ho creduto d'inserirle nell'elenco che segue, sebbene abbiano l'apparenza d'una grande precisione.

LOCALITÀ	INIZIO della perturbazione (t. m. Gr.)	INTERVALLO S - P	DISTANZA calcolata	DIREZIONE
Sciang-hai (Cina) . . . . .	16 <sup>h</sup> 8 <sup>m</sup> 45 <sup>s</sup>	5 <sup>m</sup> 40 <sup>s</sup>	Km. 3880	S
Amburgo . . . . .	" 12 56	9 16	" 7920	
Dyce (Scozia) . . . . .	" 13 0	8 50	" 7400	
De Bilt (Olanda) . . . . .	" " 9	9 53	" 8650	
Brusselle . . . . .	" " 15	" 53	" 8650	N 10° E
Darmstadt . . . . .	" " 18	10 28	" 9350	
Vienna . . . . .	" " 18	9 47	" 8540	
Oxford . . . . .	" " 22	10 0	" 8800	
Washington . . . . .	" " 28	9 29	" 8180	
Strasburgo . . . . .	" " 30	10 16	" 9100	incerta
Parigi . . . . .	" " 32	" 26	" 9310	"
Zurigo . . . . .	" " 32	9 50	" 8600	W 30° N
Belgrado . . . . .	" " 34	" 46	" 8510	Venezuela?
Neuchâtel . . . . .	" " 37	" 51	" 8610	
Chur . . . . .	" " 45	" 46	" 8510	
Livorno . . . . .	" " 45	—	—	SW
Ischia (Napoli) . . . . .	" " 53	11 1	" 10060	
Rocca di Papa (Roma) . . .	" " 55	10 30 c.	" 9400 c.	
Piacenza . . . . .	" 14 0	9 45	" 8500	
Montecassino (Caserta) . . .	" " 0	10 0 ?	" 8800 ?	
Valle di Pompei (Napoli) . .	" " 0	" 40	" 9600	Giappone o America centrale?
Ksara (Siria) . . . . .	" " 1	" 51	" 9840	
Barcellona . . . . .	" " 13	" 51	" 9840	incerta
Tortosa . . . . .	" " 14	" 15	" 9080	non ancora determi- nata
Messina . . . . .	" " 14	" 25	" 9300	
Mineo (Catania) . . . . .	" " 20	—	—	
Cairo . . . . .	" " 22	—	—	
Algeri . . . . .	" " 30	10 39	" 9580	incerta
Toledo . . . . .	" " 30	" 36	" 9510	E 10° S
Ottawa (Canada) . . . . .	" " 30	—	—	
Coimbra . . . . .	" " 34	10 50	" 9830	
Granata . . . . .	" " 40	" 46	" 9730	non ancora determi- nata

Dall'esame della 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> colonna risulta evidente il sensibile disaccordo tra i vari osservatori, anche se vicini tra loro. Se in teoria è facile calcolare la distanza dell'epicentro in base al ritardo delle onde trasversali su quelle longitudinali, nella pratica avviene talora ben diversamente, come le tante volte ho fatto rilevare, appunto per la difficoltà che spesso si presenta nella determinazione esatta di P e soprattutto di S, specialmente quando i tracciati sono più o meno perturbati dalla cosiddetta *agitazione microsismica*.

Ad ogni modo possiamo asserire che le distanze calcolate dai vari osservatori hanno oscillato dagli 8000 ai 10000 km., non tenendo conto di quelle di Sciang-hai e Dyce, assai meno distanti dall'origine del terremoto.

In quanto alla direzione, la maggior parte degli osservatori non l'ha determinata, e quei pochi che han voluto farlo, sono giunti quasi tutti a risultati quanto mai contraddittori, malgrado che in talune località funzionassero i migliori sismografi a registrazione meccanica o fotografica e perfino dotati di forte smorzamento. Ma se i tentativi di ogni singolo osservatorio sono stati in generale poco coronati dal successo, si è, invece, potuto pervenire a risultato più concreto con l'utilizzare i dati orari delle varie località. Così, l'Ufficio centrale sismologico di Strasburgo ha ritenuto il focolare sismico presso le Isole Aleutine; il professor Turner dell'Osservatorio di Oxford l'ha posto, in una prima approssimazione, in mare ( $50^{\circ}$  lat. N.  $170^{\circ}$  long. W Gr.), ossia a c. 200 miglia al sud di dette isole; infine, l'Ufficio Centr. Met. di Zurigo ha stimato l'epicentro tra la penisola del Kamtsciatka e le Aleutine, e precisamente alla lat.  $52^{\circ}$  N e long.  $162^{\circ}$  E Gr. Si può quindi concludere con sufficiente approssimazione per un terremoto sottomarino nel Nord Pacifico presso il bordo settentrionale della *Fossa della Tuscarora* con fondali fino a 700 metri, nella quale vengono originati numerosi e violenti moti tellurici che perturbano gli strumenti dell'emisfero boreale e talora dell'intero globo terrestre.

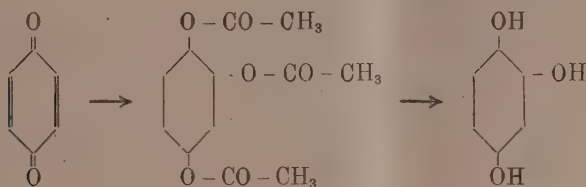
Bisogna notare che per lo stesso giorno vien riportato dai giornali un maremoto nel Nord Pacifico con onde che raggiunsero l'altezza di quasi 4 metri nel porto di Hilo nelle Isole Hawaii con naufragio di barche pescherecce; oltracciò si ruppe il cavo che unisce l'isola di Midway a quella di Guam (Marianne). Ma data l'enorme distanza tra le predette isole e le Aleutine, è probabile che si tratti di due terremoti distinti, e ciò sarebbe confermato da un telegramma al giornale inglese « Times » ove si dice che l'origine fu a c. 2000 miglia dalle Isole Samoa. Questa supposizione è tanto più verosimile se si rifletta che non si è neppure sicuri della contemporaneità dei predetti fenomeni. D'altra parte, se il maremoto nelle Isole Hawaii fosse stato conseguenza del moto tellurico presso le Isole Aleutine, come mai le ragguardevoli onde dell'oceano non sarebbero state osservate anche sulle coste della penisola del Kamtsciatka e dell'Alaska e forsanco della Columbia inglese e del Giappone?

Da quanto ha esposto risulta poi evidente come con gli attuali strumenti sia talora difficile la sicura determinazione dell'epicentro di un telesismo utilizzando i dati di un solo osservatorio, e per conseguenza non sia prudente il divulgare nei giornali politici, che vanno in mano di tutti, i risultati troppo spesso fallaci di simili ricerche; perchè in caso si sbagli di grosso, come pur troppo si è verificato per i telesismi del 3 e del 24 febr., qui accennati, si arreca non piccola offesa al prestigio e alla serietà dei nostri studi e, quel che è peggio, si corre il rischio di allarmare inutilmente molte famiglie che hanno persone care nelle regioni supposte colpite dal terribile flagello del terremoto.

**Chimica.** — *Ricerche sopra i fenoli derivati del cimene* <sup>(1)</sup>.

Nota di G. BARGELLINI, presentata dal Corrisp. N. PARRAVANO.

Quando si fa reagire il chinone con anidride acetica in presenza di piccola quantità di ac. solforico conc., esso si trasforma, come osservò Thiele <sup>(2)</sup>, in ossiidrochinon-triacetato, dal quale poi per saponificazione si ha l'ossidrochinone:



Questa medesima reazione fu applicata dallo stesso Thiele <sup>(3)</sup> ad altri chinoni, dimostrando che è una reazione generale per mezzo della quale si riesce ad introdurre un nuovo ossidril fenico nella molecola degli idrochinoni, passando per i chinoni.

Applicando la reazione di Thiele al timochinone, era da prevedersi che la reazione procedesse in modo analogo a quella che avviene con gli altri chinoni: il caso del timochinone offriva però uno speciale interesse perchè, secondo che il nuovo gruppo ossiacetilico che entra nella molecola va ad occupare la posizione orto al — CH<sub>3</sub> in posizione 1, oppure la posizione orto al — C<sub>3</sub>H<sub>7</sub> in posizione 4, potevano prendere origine due triacetati isomeri, corrispondenti rispettivamente alle formule 2 e 5.

Facendo infatti reagire il timochinone con anidride acetica in presenza di ac. solforico conc. nelle condizioni indicate da Thiele, per il chinone, potei isolare due triacetil-triossi-cimeni differenti, uno poco solubile in alcool freddo, fusibile a 135-137° e l'altro più facilmente solubile, fusibile a 83-85°.

Gr. 20 di timochinone in polvere si versano poco a poco in una mescolanza di 60 c.c. di anidride acetica e 2 c.c. di ac. solforico conc. agitando continuamente e mantenendo la temperatura a circa 30°. Dopo che

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Siena.

(<sup>2</sup>) Thiele, B., 31, 1247 (1898).

(<sup>3</sup>) Thiele e Winter, A., 311, 341 (1900); Thiele e Günther, A., 349, 45 (1906).



tutto il timochinone si è disciolto colorando il liquido in giallo, si lascia stare la miscela a temp. ordin. per 12-24 ore. Gettando in acqua il prodotto della reazione, si separa un olio pesante giallastro che poco a poco si raprende in una massa dura e friabile di colore bianco sporco.

Con ripetute cristallizzazioni frazionate dall'alcool, potei da questo prodotto greggio isolare i due triacetati sopra rammentati. Da 20 gr. di timochinone si ottiene circa 10 gr. di triacetato fusibile a 135-137° e circa 25 gr. di triacetato fusibile a 83-85°.

*Triacetato fusibile a 135-137°.* — L'isomero che a freddo si scioglie nell'alcool meno facilmente dell'altro e quindi si deposita per il primo per raffreddamento delle soluzioni alcooliche, si purifica facendolo cristallizzare più volte dall'alcool bollente. È bianco, cristallino, fusibile a 135-137°.

Dette all'analisi i seguenti risultati:

Sostanza gr. 0,2850; CO<sub>2</sub> gr. 0,6475; H<sub>2</sub>O gr. 0,1720; donde:

	Calcolato per C <sub>18</sub> H <sub>26</sub> O <sub>8</sub>	Trovato
% C . . . . .	62,33	61,96
% H . . . . .	6,49	6,70

*Triacetato fusibile a 83-85°.* — L'isomero che nell'alcool freddo si scioglie più facilmente dell'altro e rimane quindi disciolto nelle ultime acque madri alcooliche quando si separa la mescolanza per cristallizzazione frazionata dall'alcool, fu purificato facendolo cristallizzare più volte dall'alcool (dopo ebollizione con carbone animale). Si può far cristallizzare anche dall'etere di petrolio per lento svaporamento, o dall'acido acetico diluito. Si giunge ad ottenerlo ben cristallizzato in aghetti bianchi fusibili a 83-85°.

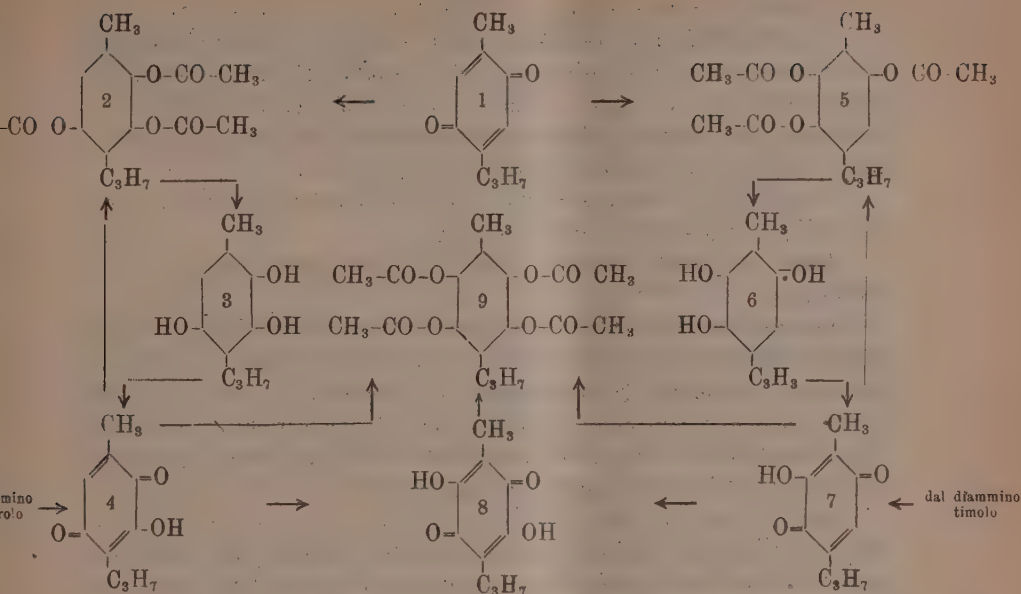
Dette all'analisi i seguenti risultati:

Sostanza gr. 0,2886; CO<sub>2</sub> gr. 0,6565; H<sub>2</sub>O gr. 0,1700; donde:

	Calcolato per C <sub>18</sub> H <sub>26</sub> O <sub>8</sub>	Trovato
% C . . . . .	62,33	62,04
% H . . . . .	6,49	6,55

Ottenuti questi due composti, bisognava stabilire quale delle due formule possibili doveva essere attribuita all'uno e quale all'altro. Potei risolvere questo problema trasformando i composti ottenuti nei corrispondenti ossitimochinoni, che erano già conosciuti, preparati per altra via.

Nello specchio seguente sono riportate le formule dei composti che ho preparati a tale scopo e sono mostrate schematicamente le loro relazioni genetiche:



Sciogliendo in ac. solforico conc. a freddo<sup>(1)</sup> il triacetato fusibile a 135-137°, i gruppi acetilici vengono saponificati, e quando si getta poi in acqua la soluzione solforica, il triossi-cimene resta disciolto nell'acqua. Non mi sono occupato per il momento di isolare questo triossi-cimene, ma l'ho ossidato subito, aggiungendo al liquido una soluzione conc. di cloruro ferrico. Ho ottenuto così un ossi-timochinone giallo-chiaro, fusibile a 181-183° identico a quello che Mazzara<sup>(2)</sup> aveva ottenuto ossidando con cloruro ferrico il diammino-carvacrolo e per il quale aveva dimostrato che corrisponde alla formula 4 di 3-ossi-timochinone.

Il fatto che dal triacetato fusibile a 135-137° si ottiene il 3-ossi-timo-  
chinone della formula 4, dimostra che in questo triacetato i tre gruppi ossi-  
acetilici occupano le posizioni 2-3-5 (formula 2).

Come riprova di questa dimostrazione io preparai di nuovo il 3-ossitimoquinone dal carvacrolo col metodo descritto da Mazzara: riscaldandolo con anidride acetica e polvere di zinco (riduzione acetilante) ottenni un composto che, per la sua maniera di preparazione, deve corrispondere alla formula 2 di 2-3-5-triacetil-triossi-cimene ed osservai che è perfettamente identico al mio triacetato fusibile a 135-137°: la mescolanza dei due prodotti fonde alla stessa temperatura 135-137°.

(1) Se si riscalda, si svolge  $\text{SO}_2$  e si forma un prodotto differente di cui darò notizie più precise in una prossima Nota.

(<sup>2</sup>) Mazzara, Gazz. chim. ital., 20, 480 (1890).

Analogamente saponificando con ac. solforico conc. il triacetato fusibile a 83-85° e ossidando poi con cloruro ferrico il triossi-cimene formatosi nella saponificazione, ottenni un ossi-timochinone fusibile a 166-168° cristallizzato in laminette gialle aranciate e identico a quello che diversi chimici per vie diverse avevano preparato. Mazzara<sup>(1)</sup> dimostrò che in questo ossi-timochinone l'ossidrilico fenico occupa la posizione 6 (formula 7).

Nel triacetato fusibile a 83-85° i tre gruppi ossiacetilici devono occupare dunque le posizioni 2-5-6 (formula 5).

Anche per questo triacetato volli una riprova sperimentale della sua costituzione.

Sottoponendo alla riduzione acetilante il 6-ossi-timochinone che avevo preparato dal diammino-timolo col metodo descritto da Mazzara, ottenni un composto al quale, per la sua maniera di preparazione, spetta certamente la formula 5 di 2-5-6-triacetil-triossi-cimene ed osservai che è in tutte le sue proprietà identico al mio triacetato fusibile a 83-85°: la mescolanza dei due prodotti fonde alla stessa temperatura 83-85°.

Non mi sono occupato per ora di isolare i due triossi-cimeni (delle formule 3 e 6) corrispondenti ai due triacetati sopra descritti, ma in una prossima Nota descriverò le esperienze che ho fatte e altre che sto facendo per isolarli e per imparare a conoscerli, come pure per differenziare meglio i due ossi-timochinoni.

\*  
\* \*

Avendo a disposizione i due ossi-timochinoni isomeri, volli infine vedere se con la reazione di Thiele potessi ancora introdurre un altro ossidrilico fenico nella loro molecola: trattando infatti i due ossi-timochinoni con anidride acetica e ac. solforico conc., potei ottenere il *tetra-acetil-tetra-ossi-cimene* della formula 9 fusibile a 186-188°. La reazione però non avviene a freddo, e a caldo si forma come prodotto secondario della reazione una sostanza resinosa, in modo che è difficile purificare il tetra-acetato e si ottiene puro con piccola rendita.

Più comodamente e più puro si può ottenere questo composto in altro modo.

Facendo passare per parecchie ore a temp. ord. una corrente di aria attraverso una soluzione di 3 ossi- oppure di 6-ossi timochinone (o di una mescolanza dei due) nell'idrato sodico al 10 % finchè il colore della soluzione, dapprima rosso violaceo, è divenuto rosso granato scuro, essi vengono trasformati nel *diossi-timochinone* della formula 8, fusibile a 222-224° identico a quello che con altri metodi era stato preparato prima da diversi chimici.

Riscaldando poi questo diossi-timochinone con anidride acetica e polvere di zinco (riduzione acetilante), ottenni lo stesso tetra-acetil-tetra-ossi-

<sup>(1)</sup> Mazzara, Gazz. chim. ital., 19, 340 (1889).

cimene che ho sopra rammentato. Dall'alcool bollente cristallizza in foglie bianche fusibili a 186-188°.

All'analisi dette i seguenti risultati:

Sostanza gr. 0,1952; CO<sub>2</sub> gr. 0,4208; H<sub>2</sub>O gr. 0,1074; d'onde:

	Calcolato per C <sub>18</sub> H <sub>22</sub> O <sub>8</sub>	Trovato
% C . . . . .	59,00	58,80
% H . . . . .	6,00	6,12

Riducendo il diossi-timochinone in soluzione alcoolica con idrogeno molecolare in presenza di nero di platino, osservai che la soluzione rossa assorbe idrogeno e si decolora completamente: quando però viene in contatto coll'ossigeno dell'aria, si colora di nuovo in rosso sempre più intenso: il *tetra ossi-cimene* che era, molto probabilmente, contenuto nella soluzione incolora si riossida rapidamente a diossi-timochinone. Facendo infatti distillare l'alcool, si riottiene il diossi-timochinone cristallizzato in aghetti appiattiti rossi fusibili a 222-224°.

Nelle ricerche che continuerò intorno ai derivati ossidrilici del cimene mi occuperò anche di stabilire se il composto incolore contenuto nelle soluzioni di diossi-timochinone idrogenato è veramente tetra-ossi cimene e se questo è identico al composto fusibile a 168° che Henderson e Boyd <sup>(1)</sup> dissero di aver ottenuto per azione del peridrola sul timolo e sul carvacrolo in soluzione acetica, composto al quale avevano attribuito appunto la formula di 2-3-5-6-tetra-ossi-cimene.

**Chimica.** — *Azione dei raggi ultravioletti nella fermentazione alcoolica da Botrytis Cinerea.* Nota di ROMOLO DE FAZI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Le esperienze vennero da me eseguite su dell'uva <sup>(2)</sup> colpita da *Botrytis Cinerea*.

Venti chilogrammi di detta uva diraspata e pigiata fornirono 12 litri di mosto della seguente composizione:

Sostanze zuccherine . . . . .	23,18 %
Acidità calcolata come acido tartarico . . .	0,48 "
Sostanze azotate solubili . . . . .	0,37 "
Sostanze azotate insolubili . . . . .	0,45 "

Dieci litri di mosto vennero sterilizzati col calore e lasciati per le esperienze in corso.

<sup>(1)</sup> Henderson e Boyd, Soc., 97, 1663 (1910).

<sup>(2)</sup> Uva dei Castelli Romani, presa in località « Cioia » (Grottaferrata).



Grammi 500 di mosto non sterilizzato, posti in un pallone di vetro Uviol (A) vennero esposti per 6 ore all'azione di una lampada in quarzo a vapori di mercurio, della Quarzlampe di Hanau (intensità luminosa 1200 candele). La temperatura venne mantenuta a 14° C.

Altri 500 grammi di mosto non sterilizzato posto in un pallone di vetro ordinario (B) furono lasciati per 6 ore alla luce naturale mantenendo la temperatura a 14° C.

Il contenuto del pallone A venne poi seminato in 5 litri di mosto sterile, posto in altro pallone di vetro (A).

Il contenuto del pallone B venne pure seminato in 5 litri di mosto sterile, posto in altro pallone di vetro (B).

#### RISULTATI DELLA FERMENTAZIONE.

PALLONE A (mosto esposto)			PALLONE B (mosto non esposto)		
Ore	Temperatura in C.	Sostanze zuccherine %	Ore	Temperatura in C.	Sostanze zuccherine %
0	12,2	23,18	0	12,4	23,18
24	12,4	21,60	24	12,5	22,06
48	12,5	19,12	48	12,7	21,15
72	12,8	17,05	72	13	20,03
96	13,1	14,81	96	13,3	18,91
120	13,5	11,55	120	13,6	17,50
144	13,8	8,15	144	13,8	16
168	13,7	6,44	168	14	14,25
192	13,5	4,11	192	14,3	12,18
216	13,2	3,47	216	14,5	10,46
240	13	2,06	240	14,8	9,12

Acidità determinata come acido tartarico al 10° giorno di fermentazione:

Mosto contenuto nel pallone A . . . . 0,50 %

Mosto contenuto nel pallone B . . . . 0,59 "

Il mosto contenuto nel pallone B fu lasciato fermentare ancora per 20 giorni ad una temperatura oscillante tra i 13° e i 14° C.

Al 30° giorno di fermentazione vennero determinate nuovamente: l'acidità, che si riscontrò del 0,64 % e le sostanze zuccherine del 2,10 %.

Tanto del vino ottenuto dal mosto A, come di quello ottenuto dal mosto B venne determinato il grado alcoolico.

Vino A: (determinazione fatta al 10° giorno di fermentazione) alcool in peso 10,09 %.

Vino B: (determinazione fatta al 30° giorno di fermentazione) alcool in peso 9,42 %.

**Biologia.** — *Ricerche sul Radiozoum lobatum* Ming.<sup>(1)</sup>.

Nota della dott.<sup>SSA</sup> G. ZANONI, presentata dal Socio B. GRASSI<sup>(2)</sup>.

Al piccolo gruppo dei *Cistoflagellati*, già comprendente i due gen. *Nottiluca* e *Leptodiscus*, il Mingazzini<sup>(3)</sup> ascriveva una nuova forma, da lui riscontrata per la prima volta nelle acque dello stretto di Messina, il *Radiozoum lobatum*.

Ripresone lo studio, su proposta del prof. Sanzo, riassumerò qui brevemente alcune delle mie osservazioni che, correggendo qualche punto della rapida e in parte inesatta descrizione del Mingazzini, possono, forse, dare un'idea più completa di questo protozoo, interessante sia per la propria organizzazione che per essere stato attribuito a un gruppo, il quale — comprendendo forme tra loro molto differenti e forse lontane, certo assai poco note — deve essere oggetto di revisione.

Il *Radiozoum lobatum* si presenta come una piccola capsula gelatinosa di 1-2 mm. di diametro, la cui forma subferica è, nella zona normalmente orientata verso l'alto, per così dire interrotta da estroflessioni in numero variabile intorno a una media di 4-5. D'una trasparenza vitrea, solo nella parte inferiore presenta una piccola macchia bianca opaca: è questo il centro morfologico e funzionale della cellula, comprendente un grosso nucleo ellittico fortemente sporgente nella cavità cellulare, circondato da una zona di protoplasma finemente granuloso, la quale, a sua volta, fa passaggio ad un'altra più esterna a struttura alveolare. Da questa si irradiano regolarmente numerose trabecole protoplasmatiche che decorrono subito al disotto della membrana, variamente ramificandosi e anastomizzandosi in modo da formarvi un reticolo a maglie larghe e irregolari, mentre tutta la cavità cellulare resta occupata da un liquido trasparente, incolore, lievemente gelatinoso. Una tale organizzazione, salvo alcune varianti di valore secondario, il *Radiozoum* ha in comune con altri organismi galleggianti pelagici — come per es. la *Nottiluca* — e deve esprimere un tipico adattamento a questo genere di vita.

Alla periferia della zona alveolare fasci di fibrille provenienti dalla regione circostante al nucleo il quale, come meglio risulta da una colorazione vitale

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio del R. Istituto di Biologia marina in Messina diretto dal prof. L. Sanzo.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 dicembre 1922.

(3) Mingazzini P., *Contributo alla conoscenza dei Cistoflagellati Radiozoum lobatum*. Ricerche del Laboratorio di Anatomia umana normale, Roma, vol. X, 1904.

col rosso neutro, viene da esse propriamente avvolto come da una vera cuffia, si uniscono in uno spesso cordone a struttura evidentemente fibrillare-cordone che, tagliando la concavità cellulare come la corda di un arco di cerchio, va ad addossarsi lateralmente sulla membrana per irradiarsi di qui in nuove trabecole, dispergentesi le une sulla volta superiore della capsula dove si riconnettono con le ultime diramazioni del restante reticolo periferico, ritornanti le altre verso la massa centrale protoplasmatica. Nella zona d'inserzione del cordone sulla membrana sono, in questa, caratteristici due corpiccioli risultanti di un granulo centrale e di una capsula periferica fortemente rifrangenti, il cui significato funzionale mi sfugge.

Le maglie della zona alveolare sono per lo più regolarmente occupate da granuli o bastoncelli, rifrangenti, di colore giallastro aventi una struttura concrezionata a strati concentrici disposti intorno a un nucleo centrale; più internamente si trovano spesso, con regolare disposizione radiale, cumuli di gocce di grasso di dimensioni progressivamente crescenti verso l'esterno. La frequenza di quest'ultime come dei granuli è notevolmente variabile nei diversi individui, sembra però secondo un rapporto inverso degli uni alle altre, osservandosi, in genere, maggior ricchezza di granuli in quelli nei quali le gocce grasse sono più scarse. Mentre queste ultime, già note per altri protozoi, tra i quali la *Noctiluca*, hanno indubbiamente significato di materiale di riserva e forse anche contribuiscono al galleggiamento, i granuli, per quanto ancora nulla di sicuro possa dire circa la loro precisa composizione chimica, devono tuttavia, con ogni probabilità, tenuto conto della struttura indizio di successive deposizioni, della distribuzione, della resistenza ai diversi solventi, considerarsi come materiale di escrezione. Ancora degno di nota è che il liquido contenuto negli alveoli è il solo, nel caso di colorazioni vitali, a trattenere stabilmente la sostanza colorante, sia che ciò si debba a speciali condizioni chimico-fisiche ad esso create dal trovarsi racchiuso in breve spazio entro le pareti degli alveoli, o sia piuttosto — molto più probabilmente — che, com'è noto, per molte cellule, la sostanza colorante assunta dal protoplasma sia da questo successivamente, per una sorta di secrezione, eliminata nel liquido alveolare <sup>(1)</sup>.

Nell'individuo vivente si può ancora osservare un altro interessante organello: a contatto della membrana, sul lato inferiore al disotto del nucleo, è quasi sempre distinguibile un cestello di fibre o meglio di costoline intensamente rifrangenti, talora ramificate, con andamento curvilineo vorticoso convergenti tutte in un centro, rappresentato dal vertice di un breve tubo avvolto a spirale. Negli individui integri null'altro è visibile, ma in quelli in cui il protoplasma si sia coartato intorno al nucleo, lasciando scoperta buona parte della capsula, o, ancor meglio, in individui degenerati in cui

(1) Mayer, Analyse der Zelle Fischer, Iena (1921).

la massa protoplasmatica sia in disfacimento, intorno al vortice si scopre un'ampia zona circolare costituita di inspessimenti radiali perfettamente ialini. Di questo duplice organello il Mingazzini considera la prima parte come un centrosoma con relativa astrosfera paragonabile alle corrispondenti strutture dei Metazoi, la seconda come cordoni di protoplasma denso, origine delle trabecole periferiche. È facile riguardo a quest'ultima persuadersi della natura puramente membranosa degli inspessimenti ialini a cui spetterebbe una funzione tipicamente scheletrica come zona di maggiore resistenza ad azioni meccaniche, tanto più spiegabile in una capsula di così notevole ampiezza. Formazioni a questa corrispondenti ci sono del resto già note per altri protozoi e, fra l'altro, potrebbe forse considerarsi tale anche il così detto « Staborgan » della *Nottiluca*. Quanto poi alla prima parte è pure ovvio che le delicate e tenui irradiazioni dell'astrosfera dei Metazoi, espressione, secondo le ipotesi moderne più accettabili <sup>(1)</sup>, di un ordinamento dinamico di particelle secondo linee di forza durante il periodo della divisione, nulla abbiano a che fare con queste fibre grossolane, persistenti anche dopo la degenerazione del protoplasma e nelle quali vari metodi di colorazione mettono in evidenza un filo assiale ben differenziato, fisicamente come gel più compatto e forse anche chimicamente.

Anche il centro di convergenza delle fibre, pur tenendo presente che in alcuni casi (Eliozoi mononucleati) il granulo che nelle divisioni si comporta da centrosoma sembra pure avere, almeno apparentemente, funzioni di sostegno come punto di convergenza dei fili assiali degli axopodi, e nonostante tutte le cautele consigliate dalla incertezza delle nostre conoscenze relativamente a tanti organelli dei protozoi, pur tuttavia, per la sua forma e il suo comportamento, deve ritenersi essenzialmente come una semplice differenziazione membranosa.

Anche dunque al cestello centrale spetterebbe almeno in parte una funzione di sostegno.

È anzi a questo proposito, interessante notare come, già sul vivo con colorazioni vitali e sopra tutto poi sulle sezioni, si vede da esso appunto irraggiarsi tutto all'intorno per così dire un mantello di fibrille più o meno evidentemente riunite in fascetti, le quali, percorso superficialmente tutto il territorio di protoplasma denso, son quelle poi che attraverso alle pareti degli alveoli della seconda zona, si continuano a costituire le trabecole periferiche chiaramente fibrillari. Se e quali rapporti queste fibrille abbiano con il cordone più sopra descritto non ho potuto vedere chiaramente.

A tali differenziazioni fibrillari del protoplasma — che oggi van scoprendosi in molti protozoi specialmente ciliati — si vogliono attribuire <sup>(2)</sup>, dopo

(<sup>1</sup>) Ruffini, Lezioni di citologia ed embriologia della R. Università di Bologna.

(<sup>2</sup>) Taylor e Sharp, Publications of Univ. of California Zoology, 1921.



la dimostrazione dei famosi neurofani dello Stentor, funzione neuromotoria con distinzione anche, oltrechè di fibrille, di centri coordinatori; ma, molto probabilmente, almeno in un organismo come il *Radiozoum* che, privo di movimenti attivi propri, ha una vita di relazione molto ridotta, esse devono rappresentare una condizione più primitiva, condizione in cui l'irritabilità va ancora congiunta con la contrattilità e fors'anche con una funzione di sostegno. E tale interpretazione funzionale troverebbe maggiormente la sua giustificazione qualora si potesse veramente dimostrare un significato biologico di difesa o di preparazione alla riproduzione a quel fenomeno di retrazione e di coartamento del protoplasma intorno al nucleo che, osservabile spesso in individui appena pescati, si riscontra poi sempre in laboratorio dopo qualche tempo che l'organismo viene a trovarsi in condizioni sfavorevoli.

A prescindere dalla caratteristica differenziazione fibrillare, la zona di protoplasma compatto immediatamente circondante il nucleo deve ritenersi come la sede principale del metabolismo della cellula. In essa che appare solcata da canalicoli (formazioni artificiali?), sia con colorazioni vitali che con altri metodi, si rivelano numerosissime granulazioni materiale forse di riserva alcune, espressione altre di quella attività metabolica che per ogni cellula, anche se non specificamente deputata a tale funzione, possiamo riavvicinare al tipo dell'attività secretoria. Essa è poi anche il luogo di formazione, sia di quei prodotti che ho ritenuto essere di escrezione, sia del materiale grasso, gli uni e l'altro iniziatisi qui in forma rispettivamente di minutissimi granuli o di goccioline e via via migranti successivamente verso la periferia.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrisp. ARMELLINI, a nome anche del Socio CERULLI, legge una Relazione sulla Memoria del dott. M. MAGGINI, intitolata: *Ricerche di fotometria fotografica sopra alcune variabili ad eclissi*, concludendo con la proposta che siano inviati ringraziamenti all'Autore.

La proposta della Commissione, messa ai voti dal Presidente, è approvata dalla Classe.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente VOLTERRA dà la triste notizia della morte del Socio straniero prof. GUGLIELMO RÖNTGEN, avvenuta l'11 febbraio 1923, ricordando i meriti insigni e la grande scoperta di questo illustre fisico, che apparteneva alla Accademia dal 2 agosto 1898.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio HAGEN presenta il vol. 6° del *Catalogo astrografico* della Specola Vaticana e riferisce brevemente intorno al lavoro.

Il Socio LEVI-CIVITA, a nome anche del prof. UGO AMALDI, offre in omaggio all'Accademia il primo volume delle loro *Lezioni di meccanica razionale*. Queste lezioni, di cui è in preparazione il secondo volume, sono sorte attraverso un lungo tirocinio di insegnamento e hanno carattere prevalentemente didattico e istituzionale. Tuttavia gli Autori confidano che, nell'ambito degli elementi, il libro possa essere accolto anche come opera di consultazione, in quanto si sono sforzati di tener conto delle svariate e molteplici esigenze derivanti dalle diverse finalità scientifiche e tecniche con cui può essere affrontato lo studio o occasionalmente ripreso un qualche capitolo della meccanica razionale.

Il Socio MARCHIAFAVA presenta in omaggio due lavori; il 1° intitolato: *Sulla genesi e sulla divisione delle varie forme della tubercolosi polmonare*, e il 2°, scritto insieme al prof. NAZARI, intitolato: *La malattia di Take Jonesco (aortite ulcerosa tifica)*.

Infine il Segretario CASTELNUOVO dà notizia delle pubblicazioni pervenute in dono all'Accademia, segnalando due Note del Socio SILVESTRI; il libro *The new Heavens* del Socio straniero HALE; e due pubblicazioni dell'Associazione Elettrotecnica Italiana destinate l'una a ricordare il 25° anniversario della fondazione di questa, l'altra alla commemorazione di GALILEO FERRARIS.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il PRESIDENTE dà comunicazione di una lettera del Socio BRUNI il quale chiede che sia aperto un plico da lui inviato l'8 febbraio 1921 per conto del dott. PESTALOZZA e che sia verificata l'identità del contenuto del plico stesso con una Nota del predetto dottore apparsa nel n. 1 dell'anno 1923 del « Giornale di chimica industriale ed applicata » che egli ha fatto pervenire all'Accademia. Il PRESIDENTE apre il plico che risulta spedito l'8 febbraio 1921, pervenuto all'Accademia l'11 dello stesso mese e presentato alla Classe nella seduta del 6 marzo successivo; e incarica i Soci CORBINO e LEVI-CIVITA di verificare l'identità di cui sopra. Accertata dai Soci predetti tale identità, se ne prende atto nel verbale.

G. C.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*Presentate nella seduta del 4 marzo 1923.*

- AMALDI U. — Lezioni di meccanica razionale, vol. I. Bologna, 1922. 8°, pp. I-XIII, 1-741.
- Associazione elettrotecnica italiana, 1897-1922. Milano, 1922. 4°, pp. 1-45.
- BACCHINI C. — I termometri elettrici (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- BELLINCIONI G. — La difesa dei laghi artificiali e le derivazioni di portata solida (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- BIGAGINI G. — La selezione dei circuiti a c. a. mediante *relais* a frequenza (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- CAMPANILE G. — Materiali per la identificazione delle cuscute italiane (Estr. da « Le Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LVI). Modena, 1923. 8°, pp. 1-24.
- CAMPANILE G. — Ulteriori osservazioni sulla malattia delle frutta di mandarino dovuta a *Gyptosporina citriperda* Camp. (Estr. da « Le Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LV, pp. 407-502). Modena, 1922. 8°.
- CAMPOS G. — Un wattometro sommatore ed altri dispositivi di comparazione (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- CASEY L. T. — *Memoirs on the Coleoptera* vol. X. Lancaster, 1922, 8°, pp. 1-520.
- Catalogo astrografico della Specola Vaticana, vol. VI. Roma, 1922. 4°, pp. I-XXXIX, 1-209.
- COMANDUCCI C. J. — Normale presenza di batteri nelle radici di numerose fanerogame (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali », vol. XXXI, pp. 484-487). Roma, 1922. 8°.
- Commemorazione solenne di Galileo Ferraris nel XXV anniversario della sua morte, indetta dall'Associazione elettrotecnica italiana (Torino, 7 maggio 1922). Milano, 1922. 4°, pp. 1-22.
- CUSMANO A. — Motori sincroni e condensatori statici (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano. 1922. 4°, fol.
- DEL VALLE G. — Bilancio idrologico dei bacini imbriferi (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- DUPORT H. — Critique des théories Einsteiniennes. Dijon, 1923. 8°, pp. 1-38.
- EMANUELI L. — Le perdite nel dielettrico nei cavi isolati in carta impregnata per trasporto di energia (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- FORNARI G. — Delle sistemazioni idraulico-forestali dei rimboschimenti (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- FORTI A. — Le crisi di magra ordinarie ed eccezionali, dei corsi d'acqua nella distribuzione dell'energia elettrica (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX) Milano, 1922. 4°, fol.
- GIANDOTTI M. — Rendimento dei bacini imbriferi (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- GIANDOTTI M. — Sulla portata solida di alcuni tessuti e sull'interrimento dei laghi artificiali (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- GIULIANI I. — La teoria elettronica nell'elettroterapia (Estr. dal giornale « L'Eletttricista », vol. I). Roma, 1922. 8°, pp. 1-6.
- HALE G. E. — *The New Heavens*. New York, 1922. 8°, pp. I-XV, 1-88.



- LEVI-CIVITA T. — Lezioni di meccanica razionale, vol. I. Bologna, 1922. 8°, pp. I-XIII, 1-741.
- MARCHIAFAVA E. — La malattia di Take Jonesco (Aortite ulcerosa tifica) (Estr. dal « Policlinico », sezione medicina). Roma, 1923. 8°, pp. 1-10.
- MARCHIAFAVA E. — Sulla genesi e sulla divisione delle varie forme della tubercolosi polmonare (Estr. dal « Policlinico », sezione pratica). Roma, 1922. 8°, pp. 1-19.
- NAZARI A. — La malattia di Take Jonesco (Aortite ulcerosa tifica) (Estr. dal « Policlinico »; sezione medicina). Roma, 1923. 8°, pp. 1-10.
- NORSA R. — Il calcolo meccanico dei conduttori (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- ODDONE E. — Ricerche teorico-sperimentali sulle vibrazioni meccaniche del sottosuolo. Roma, 1923. 4°, pp. 1-96.
- PEROTTI R. — Normale presenza di batteri nelle radici di numerose fanerogame (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali », vol. XXXI, pp. 484-487). Roma, 1922. 8°.
- PFIEFFNER E. — Un nuovo condensatore elettrico e le sue applicazioni (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- PRINETTI S. — Sulla distribuzione di potenziale nelle catene di isolatori a sospensione multipla (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- REBORA G. — Pali a traliccio per linee elettriche (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- REVESSI G. — Studi sulle trasmissioni: VI. Di alcune applicazioni delle curve caratteristiche delle linee (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- SACCHETTO E. — Considerazioni sull'impiego di cavi monofasi per trasmissioni d'energia a corrente alternata ad altissima tensione in relazione alle perdite d'energia, al riscaldamento ed alla portata (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- SARTI S. — A proposito delle norme del V. D. E. per gli apparecchi elettrici di misura (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- SARTORI G. — Motori autosincroni. Un nuovo tipo compensato (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- SEMENTA G. — Isolatori a perno e isolatori sospesi (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- SILVESTRI F. — Descriptions of some Indo-Malayan species of *Capritermes* (*Termitidae*) (Dxtr. da « Records of the Indian Museum », vol. XXIV, pp. 535-546). Calcutta, 1922. 8°.
- SILVESTRI F. — *Thysanura* (Abdruck aus « Michaelsen Deutsch-Südwestafrika », Band II, pp. 75-89). s. l. et d. 8°.
- TRAVERSO G. B. — Materiali per la identificazione delle cuscute italiane (Estr. da « Le Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LVI). Modena, 1923. 8°, pp. 1-24.
- TRAVERSO G. B. — L'organizzazione dei servizi fitopatologici in Italia (Estr. dagli « Atti del XVI Congresso nazionale della Unione delle Cattedre ambulanti di agricoltura italiane »). Roma, 1923. 8°.
- USIGLI B. — Voltametri e dispositivi di sincronizzazione (Estr. da « L'Elettrotecnica », anno IX). Milano, 1922. 4°, fol.
- ZAPPA G. — Sulla osservazione meridiana delle stelle quasi fondamentali (Estr. dagli « Atti della R. Accademia dei Lincei, Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali », vol. XXIV, pp. 703-708). Roma, 1915. 8°.
- ZORZI G. — I pali in cemento armato centrifugato (Estr. da « L'Elettrotecnica », vol. IX). Milano, 1922. 4°, fol.



